

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 aprile 1916.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI*⁽¹⁾.

4. ESTENSIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE ALLE VARIETÀ. — Il teorema ottenuto pei sistemi continui di curve d'una superficie, si può estendere ai sistemi continui di superficie d'una varietà a 3 dimensioni, o, più in generale, ai sistemi continui di varietà a $k - 1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

Riferiamoci per brevità ad una varietà V a 3 dimensioni. Qualora, per la dimostrazione del teorema suddetto, si volesse usufruire della proiezione di V sopra uno spazio multiplo, occorrerebbe un esame un po' più minuto di quello già esposto nei numeri precedenti, a causa dei punti tripli che presenta la superficie F proiezione d'una superficie di V , e soprattutto dei punti cuspidali di F , i quali cadon tutti sulla superficie di diramazione dello spazio multiplo. In verità la presenza di codesti punti singolari non altererebbe le linee essenziali del procedimento; ma costringerebbe a qualche lungaggine nel discorso.

Preferisco perciò di esporre, per le varietà a 3 dimensioni, una dimostrazione che muove dagli stessi concetti espressi nella mia Nota già citata dei Rendiconti di Palermo, 1905. Si vedrà come questa dimostrazione

⁽¹⁾ Ved. la Nota I a pag. 459 di questi Rendiconti (1916, fasc. 7°).

valga, con soli adattamenti del linguaggio, per le superficie e per le varietà superiori.

Consideriamo sulla V , priva di punti multipli in uno spazio S_r , una superficie irriducibile e priva di punti multipli F , la quale sia atta a definire un sistema continuo almeno ∞^1 .

Il sistema $|E|$ staccato su V dalle forme di S_r , d'ordine l non minore dell'ordine m di F , contiene parzialmente ogni superficie d'ordine m tracciata su V ; e, crescendo, se occorre, l , si può esiger pure che $|E|$ segni su F un sistema lineare completo ⁽¹⁾. Aggiungeremo, per quanto non sia strettamente necessario pel seguito, che il sistema $|D|$, residuo di F rispetto ad $|E|$, ed il sistema $|C|$, segato da $|D|$ su F , possono inoltre supporre irriducibili e privi di punti base; cosicchè la generica superficie D e la generica curva C sono irriducibili e prive di punti multipli.

Le superficie E , passanti per C , costituiscono un sistema lineare H , ∞^α , e tagliano altrove su F il sistema caratteristico completo. Quelle, E_0 , tra esse, che sono infinitamente vicine alla superficie composta $F + D$, hanno una linea doppia infinitamente vicina a C , e sono quindi spezzate in una parte infinitamente vicina ad F ed in una infinitamente vicina a D (tutto ciò si deduce dalle proprietà analoghe delle curve di una superficie, segnando con un iperpiano).

Consideriamo ora il più ampio sistema algebrico connesso M , contenente F ; e indichiamo con T il sistema connesso costituito dalle superficie E spezzate ciascuna in una superficie di M ed in una superficie dell'ordine di D . A quest'ultimo sistema appartengono intanto le superficie E_0 ; e viceversa ogni E di T , infinitamente vicina ad $F + D$, avendo una linea doppia infinitamente vicina a C , passa per C ed è quindi una E_0 . Nello « spazio » lineare i cui « punti » son le superficie E , la varietà « tangente » a T , nel punto $F + D$, è dunque costituita dai punti E passanti per C . Si conclude intanto che nell'intorno di $F + D$ la varietà T ha la dimensione α e che in $F + D$ essa possiede, per varietà tangente, lo « spazio » lineare H .

Sieno

$$(8) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r; t) = 0, \quad (9) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r; \tau) = 0$$

(x_1, x_2, \dots, x_r coordinate di punto in S_r ; t, τ parametri) le equazioni di due superficie rispettivamente variabili in due « rami » appartenenti a T , e uscenti da $F + D$.

È lecito di rappresentare in tal modo i due rami, perchè ogni superficie di T , essendo intersezione completa di V con una forma, può appunto

⁽¹⁾ È questo un noto teorema di Castelnuovo. Il teorema analogo, occorrente per le varietà superiori, trovasi nel n. 2 della mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1909).

rappresentarsi con una sola equazione (da aggiungersi beninteso alle equazioni di V). Si concluderà allora, esattamente come alla fine del n. 2, che, fissata una legge di variazione

$$t = \varepsilon^i \vartheta(\varepsilon) \quad , \quad \tau = \varepsilon^j \eta(\varepsilon).$$

di due superficie E_1, E_2 rispettivamente mobili sui due rami e tendenti insieme ad $F + D$, il fascio di superficie individuato da esse entro $|E|$ ha per limite il fascio

$$(10) \quad b \left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s} \right)_0 + k\beta \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma} \right)_0 + \mu f(x_1, x_2, \dots, x_r; 0) = 0,$$

ove $f(x_1, x_2, \dots, x_r; 0) = 0$ è l'equazione di $F + D$.

A questo punto si osservi che la curva C è limite di una curva \bar{C} dello stesso ordine comune alle due componenti di una E_1 (o di una E_2), che tenda ad $F + D$, e che la forma variabile (8) [o (9)], che stacca su V la E_1 (o la E_2), o tocca V lungo \bar{C} od ha in \bar{C} una linea doppia variabile. In ogni caso il luogo di \bar{C} fa parte dell'involuppo del sistema (8) [o (9)], e quindi nei punti di C si annullano le $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s} \right)_0, \left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma} \right)_0$. Da ciò segue che il fascio (10) è costituito da elementi dello « spazio » lineare H . Ne deriva, come al n. 2, che T passa per $F + D$ con una sola falda semplice, e quindi che M passa anch'esso per F con una sola falda semplice. Resta così provato che F appartiene ad un sol sistema irriducibile completo Σ di superficie dello stesso ordine, e che Σ taglia su F il sistema caratteristico completo.

L'estensione degli sviluppi del n. 3 non offre altre difficoltà sostanziali: basta soltanto, se F possiede punti multipli, sostituire al sistema $|E|$, di cui sopra, quello segato su V dalle forme d'ordine abbastanza alto aggiunte ad F . Si perviene in tal modo alla conclusione generale:

Entro una varietà algebrica irriducibile V_k , ogni varietà a $k - 1$ dimensioni, irriducibile o no, sulla quale sieno assegnate le varietà base e le varietà multiple variabili, individua un sistema irriducibile completo, che la contiene totalmente.

5. LE CURVE ALGEBRICHE SPEZZATE, MA CONNESSE, COME FORME LIMITI DELLE CURVE IRRIDUCIBILI. QUESTIONI DI REALITÀ. — Il teorema fondamentale dei nn. 2 e 3 spiana la via per lo studio di molte notevoli questioni, ad alcune delle quali mi propongo di accennare in questo e nel numero successivo.

In una mia Nota riassuntiva *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* ⁽¹⁾, ho enunciato la propo-

(¹) Questi Rendiconti, maggio 1915, pag. 886.

sizione seguente, della quale, in quel lavoro preliminare, mi son limitato a indicare a grandi tratti la dimostrazione, fermandomi soprattutto su alcuni casi particolari, che mi interessavano fra l'altro per la dimostrazione geometrica del teorema d'esistenza:

La condizione necessaria e sufficiente affinché una curva piana spezzata C , d'ordine m , possa considerarsi come limite d'una curva irriducibile d'ordine m e genere π , è che sia possibile scegliere alcuni nodi di C , in tal numero ed in tal posizione che, considerandoli come inesistenti, si ottenga da C una curva connessa di genere virtuale π .

Qui mostrerò come questa proposizione segua, in modo molto semplice, dal teorema fondamentale del presente lavoro.

Sieno C_1, C_2, \dots, C_l le componenti irriducibili di C ; e supponiamo, per semplicità, che la curva complessiva sia dotata di soli nodi, in numero di δ , provenienti in parte dai nodi delle componenti ed in parte dalle intersezioni di queste a due a due. Diciamo m_h, π_h l'ordine ed il genere effettivo di C_h ; δ_h il numero de' suoi nodi che si assegnan come nodi di C ; i_h invece il numero dei nodi di C_h che si considerano per C come inesistenti; e infine j il numero delle intersezioni delle componenti, che si consideran pure come nodi inesistenti (punti di connessione) di C . Denoteremo con J il gruppo complessivo di queste j intersezioni.

Si hanno intanto le relazioni

$$m = \sum m_h, \quad \pi = \sum \pi_h + \sum i_h + j - l + 1, \quad \delta = \sum \delta_h + \sum m_h m_k + \sum i_h,$$

ove π è il genere virtuale di C coi $\delta - j - \sum i_h$ nodi assegnati.

Un facile calcolo mostra che la dimensione ρ del sistema lineare delle curve di ordine m passanti pei nodi assegnati di C [cioè (nn. 2 e 3) la dimensione del sistema irriducibile completo Σ individuato da C con quei tali gruppi di nodi variabili e di nodi inesistenti] soddisfa alla disuguaglianza

$$(11) \quad \rho \geq 3m + \pi - 1,$$

dove vale il segno $=$ o $>$, secondo che le condizioni imposte alle suddette curve d'ordine m sono o no indipendenti.

Dico che la curva generica di Σ è irriducibile. Siccome la cosa è vera per $l=1$, basterà, ammessala vera pel sistema continuo individuato da una curva connessa, composta da $l-1$ parti, dimostrarla pel sistema Σ . Si osservi perciò, in primo luogo, che è sempre possibile trovare $l-1$, e sieno C_1, C_2, \dots, C_{l-1} , componenti di C , tali che, considerando come inesistenti quei nodi di $\Gamma = C_1 + C_2 + \dots + C_{l-1}$ che son compresi fra i $\sum i_h + j$ nodi di C , già fissati come inesistenti, si ottenga una curva connessa. Si parta infatti da C_1 : esisterà allora qualche componente di C , e sia C_2 , connessa con C_1 attraverso ad una almeno delle intersezioni J . Similmente dovrà

esistere qualcuna delle ulteriori componenti C , e sia C_3 , connessa con $C_1 + C_2$ attraverso ad una almeno delle restanti intersezioni J ; e così proseguendo. (Si noti che con ciò resta pur provato che $j \geq l - 1$).

Ciò posto, il sistema Σ' , individuato da Γ , ha la curva generica irriducibile, ed al sistema Σ appartiene il sistema S delle curve ottenute aggiungendo ad una generica curva di Σ' una generica curva del sistema Σ'' , individuato da C_l coi suoi i_l nodi inesistenti. Sicchè, se la curva generica di Σ è riducibile, essa non può che spezzarsi in una curva dell'ordine di Γ ed in una dell'ordine di C_l : e mentre la curva generica descrive Σ , che è completo, le sue componenti descrivono rispettivamente i sistemi completi Σ' , Σ'' . Laonde il sistema Σ coincide addirittura con S e, dette q' , q'' le dimensioni di Σ' , Σ'' , si ha pertanto

$$(12) \quad q = q' + q''.$$

Ora la curva Γ coi suoi $\sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j'$ nodi inesistenti, ove j' ($j > j' \geq 1$) è il numero delle intersezioni J comuni a C_l e a Γ , ha il genere

$$\pi' = \sum_{h=1}^{l-1} \pi_h + \sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j' - l + 2 = \pi - \pi_l - i_l - j' + 1,$$

e quindi il genere effettivo della generica $\bar{\Gamma}$ di Σ' non supera π' (lo eguaglia solo se, come risulterà *a posteriori*, ogni nodo virtualmente inesistente di Γ è effettivamente inesistente per $\bar{\Gamma}$).

Si ha perciò ⁽¹⁾

$$q' \leq 3(m - m_l) + \pi - \pi_l - i_l - j';$$

e similmente, poichè la curva generica di Σ'' ha il genere virtuale $\pi_l + i_l$, viene

$$q'' \leq 3m_l + \pi_l + i_l - 1$$

e quindi

$$q' + q'' \leq 3m + \pi - 1 - j',$$

la quale, confrontata con la (11), ricordando che $j' \geq 1$, porge $q > q' + q''$, contrariamente alla (12).

⁽¹⁾ Qui si applica la proposizione che una curva piana irriducibile d'ordine n e genere effettivo p , appartiene ad un sistema irriducibile di curve analoghe, di dimensione $3n + p - 1$ (cfr. ad es. col n. 2 della mia Nota del maggio 1915). La cosa segue subito, del resto, dalla completezza della serie caratteristica del sistema.

È dunque assurdo ammettere che la curva generica di Σ sia spezzata. Risulta inoltre che la curva generica di Σ ha proprio il genere effettivo π e non $\bar{\pi} < \pi$, che cioè essa possiede esattamente tanti nodi (e non di più) quanti son quelli che si assegnarono come variabili su C per definire il sistema Σ , perchè in caso contrario la dimensione di Σ risulterebbe eguale a $3m + \bar{\pi} - 1$, contrariamente alla (11).

La sufficienza della condizione enunciata resta così stabilita. Quanto alla necessità, è una conseguenza ovvia dell'osservazione che una curva connessa non può aver come limite una curva sconnessa.

Si noterà di più che nella (11) deve valere il segno $=$, e quindi che i punti doppi assegnati di C impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m , d'accordo con un noto teorema di Noether (¹).

OSSERVAZIONE. — Se la curva C è reale, cioè se ha un'equazione a coefficienti reali, i suoi nodi immaginari sono a due a due complessi coniugati; e, qualora i nodi che si assegnano su essa si scelgano appunto reali o a due a due complessi-coniugati, le curve d'ordine m aggiunte a C risultan tutte reali. Sicchè il sistema $\Sigma \infty^p$, definito in corrispondenza a quella scelta dei nodi variabili, avendo nel « punto » C uno « spazio tangente » S_p reale, passerà per C almeno con una « falda » reale ∞^p . Si badi però che la C potrà anche essere un « punto multiplo » per Σ , in quanto può darsi che da C sia possibile ottenere qualche altra curva di Σ , cambiando il gruppo dei nodi di C assegnati come variabili. Comunque sia, si può dire che:

Se una curva reale C di ordine m , spezzata in più parti, si può render connessa e di genere virtuale π , fissando la connessione attraverso a certi suoi nodi reali o a due a due complessi coniugati, esistono $\infty^{3m+\pi-2}$ curve reali irriducibili d'ordine m e genere π , ad essa infinitamente vicine, ciascuna delle quali ha un punto doppio infinitamente prossimo ad ognuno di quei nodi di C che non si scelsero come punti di connessione.

Questo teorema offre un larghissimo campo di applicazione nelle questioni di realtà delle curve algebriche piane, e dà una base generale al metodo così detto della « piccola variazione ». Così possono da esso ottenersi come facili corollari il teorema di Harnack e molti dei bei risultati di Hilbert sui rami reali delle curve algebriche.

Spero di poter in seguito occuparmi di questo genere di applicazioni.

6. APPLICAZIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE ALLA TEORIA DELLE CURVE ALGEBRICHE SGHEMBE. CENNI DI ULTERIORI SVILUPPI. — Sia V una famiglia di curve algebriche sghembe C , di ordine n , genere p , prive di punti multipli (²).

(¹) *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta math. 8, 1886), pag. 172.

(²) Ved. ad es. il n. 1 della mia Nota citata, *Sulla classificazione delle curve algebriche*, ecc.

La formola di postulazione, che esprime il numero delle condizioni lineari indipendenti offerte alle superficie d'ordine l abbastanza grande, imponendo loro di passar doppiamente per una data C , è del tipo $k_0 l + k_1$, ove k_0, k_1 sono numeri caratteristici di C . Se la C considerata, pur essendo particolare entro V , non ha punti multipli, k_0, k_1 dipendono soltanto da n e da p ⁽¹⁾, e quindi la dimensione r del sistema lineare S delle superficie F d'ordine l , che passano doppiamente per una curva C variabile in V , non s'altra finchè C non acquista qualche nuovo punto multiplo.

Inoltre, sempre nell'ipotesi che l sia abbastanza grande, una F generica, passante doppiamente per C , è irriducibile, e fuori di C non ha punti multipli. Ciò risulta subito dall'osservare che le superficie d'ordine l' , abbastanza alto, passanti semplicemente per C , formano un sistema lineare di dimensione > 1 , che non ha punti base fuori di C : sicchè il sistema lineare doppio di questo risulta formato da superficie irriducibili d'ordine $l = 2l'$, passanti doppiamente per C e non aventi punti base fuori di C .

Premesso questo, consideriamo il sistema irriducibile completo Σ_0 individuato (n. 4) da una F_0 generica passante doppiamente per una data C_0 di V , priva di punti multipli, e definito dalla condizione che la superficie F , mobile in Σ_0 , abbia una linea doppia variabile d'ordine n , la quale si riduca a C_0 quando F va in F_0 . Al variare di F in Σ_0 , la sua linea doppia descrive una varietà irriducibile, che abbraccia tutta la famiglia V ; e, poichè V è completa, si può affermare che le linee doppie delle superficie di Σ_0 , son tutte e sole le curve di V , e quindi che Σ_0 può descriversi tutto facendo variare una C di V e insieme il sistema lineare completo S , individuato da quella C . Non si esclude con ciò che, per qualche particolare posizione di C entro V , il sistema delle superficie d'ordine l , aventi la linea doppia C , si amplii; ma ciò accadrà soltanto allorquando la C acquisti punti multipli o, in particolare, si spezzi ⁽²⁾.

Se pertanto la C_0 , da cui partimmo, appartenesse ad un'altra famiglia V' di curve C' , prive di punti multipli, di ordine n e genere p , il sistema lineare S' , ancora di dimensione r , costituito dalle superficie d'ordine l passanti doppiamente per la C' variabile in V' , descriverebbe un sistema algebrico irriducibile Σ' , non contenuto in Σ , e contenente invece tutto il sistema lineare S , di dimensione r , definito da C_0 . Sicchè la F_0 apparter-

⁽¹⁾ Si trova infatti agevolmente che la formola di postulazione di C per le superficie d'ordine alto l , che la debbono contenere come doppia, è $3nl - 4n - 5p + 5$. Del resto questa formola può ricavarsi anche dalla Memoria di Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* [Annali di matematica, (2), tomo V, 1871].

⁽²⁾ Avvertiamo, poichè ne capita l'occasione, che l'ampliamento del sistema S in corrispondenza ad una particolare C_1 , dotata di punti multipli, può avvenire senza che il sistema stesso esoriti da Σ_0 : allora però la posizione limite del sistema S inerente ad una generica C , tendente a C_1 , non è indipendente dal modo come si passa al limite.

rebbe a due diversi sistemi irriducibili completi, contrariamente al teorema del n. 4.

Si può dunque enunciare:

Una curva algebrica sghemba irriducibile, priva di punti multipli, INDIVIDUA una famiglia (completa) di curve dello stesso ordine e genere.

In altre parole:

Due famiglie distinte di curve sghembe irriducibili e senza punti multipli, dello stesso ordine e genere, non possono avere in comune che curve dotate di punti multipli (e in particolare spezzate).

Se le due famiglie son costituite da curve dello stesso ordine, ma di generi diversi p, p' ($p > p'$), è senz'altro evidente che ogni curva ad esse comune deve avere qualche punto multiplo, giacchè una tal curva, considerata come limite di una curva di genere p , dovrà possedere qualche punto multiplo proprio ⁽¹⁾, che ne abbassi il genere per lo meno al valore p' .

La conclusione, alla quale siamo giunti per le curve algebriche sghembe irriducibili e prive di punti multipli, si potrebbe estendere ad ogni curva, irriducibile o no, sulla quale fosse assegnato il gruppo dei punti multipli propri ed il gruppo dei punti multipli impropri variabili; e il risultato si potrebbe infine trasportare, in modo del tutto analogo, alle curve appartenenti ad una varietà a tre dimensioni e più in generale alle varietà ad h dimensioni ($1 \leq h \leq k-1$) contenute in una data V_k .

Ma su ciò, come sulle conseguenze che dal teorema dimostrato derivano per la classificazione delle curve sghembe, spero di tornare in seguito, allorquando potrò occuparmi di sviluppare più ampiamente la mia Nota lineea citata, del maggio 1915.

7. SISTEMI CONTINUI AVENTI PER ELEMENTI SISTEMI LINEARI. — Passiamo ora a considerare come elementi di un sistema continuo appartenente alla superficie F , non più le sue curve, ma invece i sistemi lineari completi da esse individuati.

Ci riferiremo all'ipotesi che questi sistemi lineari sieno virtualmente privi di punti base, giacchè questo è il caso che interessa per le proprietà che abbiamo di mira.

Un sistema algebrico irriducibile, formato da ∞^q sistemi lineari completi, si indicherà con (A) , ove $|A|$ denota il generico sistema lineare in esso contenuto ⁽²⁾. E si dirà che (A) è *completo*, quando non è contenuto in una varietà algebrica irriducibile più ampia, di sistemi lineari dello stesso ordine.

La dimensione q' del sistema non supera l'irregolarità q di F , e vi

⁽¹⁾ Ved. la mia Nota lineea citata, *Sulla classificazione delle curve*, ecc. n. 5.

⁽²⁾ La notazione risponderebbe meglio al concetto, se il sistema definito s'indicasse con $\{|A|\}$ o con $(|A|)$; ma si avrebbe così una notazione ingombrante!

sono sistemi per cui il limite superiore è raggiunto ⁽¹⁾. Si indichi ora con (B) un altro sistema completo — si sottintende irriducibile — formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Fissato in (A) un generico sistema lineare $|A_0|$, i sistemi $|A_0 + B|$ riempiono un medesimo sistema irriducibile $\Sigma = (A_0 + B)$, che contiene ∞^q sistemi lineari distinti e che è quindi, esso pure, completo.

Variando $|A_0|$ in (A), poichè Σ non potrebbe che variare con continuità e d'altra parte ciò non è possibile, a cagione della sua completezza, si conclude che Σ contiene *tutti* i sistemi lineari $|A + B|$. Esso può pertanto chiamarsi la *somma* dei sistemi (A) e (B), e indicarsi col simbolo $(A + B)$.

Si osservi che per questo ragionamento è essenziale l'ipotesi che uno almeno dei sistemi (A), (B) consti di ∞^q sistemi lineari, altrimenti non potrebbe affermarsi che Σ è completo.

Premesso ciò, si consideri in (A) un altro generico sistema $|A_1|$, ed un generico sistema $|B_0|$ in (B). *Esisterà* in (B), per quanto precede, un ben determinato sistema $|B_1|$ tale che

$$|B_0 + A_0| = |B_1 + A_1| :$$

ossia il sistema $|B_0 + A_0 - A_1|$ sarà effettivo e coinciderà con un sistema di (B). Poniamo $(C) = (A + B)$ e $|C_0| = |A_0 + B_0|$: allora $|C_0|$ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui degli $|A|$ rispetto a $|C_0|$ formano un insieme Σ_0 , contenuto in (B), i cui elementi corrispondono birazionalmente agli $|A|$.

Se pertanto $q' = q$, Σ_0 abbraccia tutto (B), e si ha il noto risultato che (A) e (B) sono birazionalmente identici fra loro ed alla *varietà di Picard* V_q , relativa ad F ⁽²⁾.

Se invece $q' < q$, la totalità $\infty^{q'}$ dei $|C|$, al pari di quella dei $|B|$, sarà ancora birazionalmente identica a V_q , mentre (A) sarà identica ad una varietà contenuta in (C) o in (B), cioè in V_q . Dico che, comunque, (A) è esso stesso identico ad una varietà di Picard $W_{q'}$, di dimensione q' .

All'uopo si consideri l'insieme Γ degli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ somme dei singoli $|A|$ con un medesimo $|B_0|$. Non può evidentemente esistere un insieme continuo più ampio di sistemi $|C|$, contenenti tutti parzialmente $|B_0|$, e abbracciante Γ , perchè se no (A) non sarebbe completo. Si avverta incidentalmente che non rimane per questo escluso che i residui dei $|C|$ contenenti $|B_0|$, si distribuiscano in più totalità distinte di sistemi lineari (cfr. col numero successivo): se così fosse, noi, fra quei $|C|$, ci limiteremmo a considerar soltanto quelli che danno per residui gli $|A|$.

⁽¹⁾ Veggasi ad es. la mia Nota, *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica* (Atti del R. Ist. Veneto, tomo 68, 1909).

⁽²⁾ Cfr. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*. [Questi Rendiconti, (5), tomo 14, 1905, nn. 2-6].

Secondo quanto prima si disse, ogni sistema $|C_0| = |A_0 + B_0|$ di Γ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui riempiono un sistema Σ_0 , di $\infty^{q'}$ sistemi lineari. L'insieme Γ contiene dunque parzialmente tutti i sistemi lineari di Σ_0 ; e poichè i residui di un qualunque $|B_1|$ di Σ_0 , rispetto agli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ di Γ , sono $\infty^{q'}$ distinti, essi riempiono tutto il sistema completo (A). Insomma, gli elementi di Γ non si ottengono soltanto aggiungendo al sistema $|B_0|$, da cui partimmo, i singoli $|A|$; ma anche aggiungendo a questi un altro qualunque sistema $|B_1|$ di Σ_0 .

Da quanto precede si trae che Γ è perfettamente definito, entro la varietà (C), da uno qualunque de' suoi sistemi lineari, e che perciò, al variare di $|B_0|$ entro (B), Γ o Σ_0 , i quali come totalità di $\infty^{q'}$ elementi son birazionalmente identici ad (A), descrivono rispettivamente, in (C) ed in (B), due sistemi di $\infty^{q-q'}$ varietà di dimensione q' , che non hanno a due a due alcun elemento comune.

Si conclude pertanto che la picardiana V_q contiene un sistema $\infty^{q-q'}$ d'indice 1, di varietà $W_{q'}$, birazionalmente identiche ad (A). Il gruppo continuo permutabile G_q , appartenente a V_q , non può che mutare in sè il suddetto sistema, chè altrimenti esso avrebbe il grado > 0 .

Ne deriva che una $W_{q'}$ è lasciata ferma da $\infty^{q'}$ trasformazioni di G_q , formanti entro G_q un sottogruppo algebrico $G_{q'}$. Ed è noto che ciò equivale ad affermare che V_q ed F ammettono un sistema di q' integrali semplici di 1^a specie con $2q'$ periodi ridotti ⁽¹⁾, i quali corrispondono agli integrali relativi alla picardiana (A).

Si arriva così al teorema:

Una superficie d'irregolarità $q > 0$, la quale contenga un sistema irriducibile completo, formato da $\infty^{q'}$ ($0 < q' < q$) sistemi lineari, possiede in conseguenza q' integrali riducibili di 1^a specie con $2q'$ periodi ridotti.

Un corollario immediato, che vale la pena di notare, è il seguente:

Sopra una superficie d'irregolarità q , priva d'integrali riducibili semplici di 1^a specie, e, a fortiori, sopra una superficie la cui varietà picardiana sia a moduli generali, OGNI sistema completo non lineare, di sistemi lineari, consta di ∞^q sistemi lineari distinti.

Con che naturalmente non si esclude che la data superficie F possa contenere sistemi lineari, non appartenenti a sistemi continui più ampi. Anzi, come ho dimostrato altrove ⁽²⁾, sopra ogni superficie esistono sistemi lineari siffatti. È poi superfluo aggiungere che la F può inoltre contenere

⁽¹⁾ Castelnuovo, loc. cit., nn. 8, 10-13.

⁽²⁾ Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica. [Questi Rendiconti, (5), tomo 17, 1908, pag. 467].

sistemi completi, irriducibili *come totalità di curve*, e contenenti meno che ∞^2 sistemi lineari, senza che perciò esistano su F integrali riducibili.

OSSERVAZIONE. — Dalle considerazioni precedenti si trae pure che *sopra una superficie ogni sistema irriducibile completo (A) di sistemi lineari, è birazionalmente identico ad una varietà di Picard*, e le trasformazioni del relativo gruppo continuo si ottengono mediante le operazioni $+ A_0 - A_1$, ove $|A_0|, |A_1|$ son sistemi variabili in (A).

8. IL TEOREMA DI NOETHER PEI SISTEMI CONTINUI AVENTI PER ELEMENTI SISTEMI LINEARI. — Ricordiamo, ora, che una curva B di F , aritmeticamente effettiva, i cui caratteri virtuali (grado n , genere π , indice di specialità i) soddisfaccian cioè alla disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0,$$

ove p_a è il genere aritmetico di F , *individua* un sistema irriducibile completo (B), formato da ∞^2 sistemi lineari ⁽¹⁾.

Essendo (A) un qualunque sistema irriducibile, tracciato su F , e costituito da ∞^2 sistemi lineari, uno dei quali sia $|A|$, pel numero precedente, il sistema $A' = |A + B - B'|$ sarà effettivo, comunque si scelgano $|B|, |B'|$ in (B); e al variare di $|B'|$ in (B), gli ∞^2 $|A'|$ formeranno *un sistema irriducibile Σ , contenente $|A|$* .

Viceversa, considerato nel dato (A) un variabile sistema $|A_1|$, sempre pel numero precedente, anche il sistema variabile $|B_1| = |B + A - A_1|$ sarà effettivo e descriverà (B), che è individuato da $|B|$. Vi è pertanto in (A) un sistema $|A_1|$ tale che $|B_1| = |B'|$ e quindi

$$|B + A - A'| = |B + A - A_1|,$$

cioè $|A_1| = |A'|$. Dunque (A) coincide con Σ e si conclude che:

Un sistema irriducibile completo, costituito da ∞^2 sistemi lineari, è individuato da uno qualunque di essi.

Da quanto precede si trae che l'operazione di sottrazione applicata a due sistemi completi (A), (B), formati ciascuno da ∞^2 sistemi lineari, non può condurre a più d'un sistema ad essi analogo; ed in questo senso può dirsi che *il teorema del resto, nel campo dei sistemi completi formati da ∞^2 sistemi lineari, è applicabile proprio come nel campo dei sistemi lineari*.

OSSERVAZIONE 1^a. — In virtù dell'unicità del sistema completo irriducibile individuato da una *curva* (n. 3), il concetto di somma di due sistemi lineari si trasporta senz'altro anche ai sistemi completi non lineari di curve. Lo stesso non può dirsi del concetto di differenza, perchè, imponendo alle curve di un sistema il passaggio per un dato gruppo di punti

(1) Ved. la mia Nota citata, *Osservazioni varie*, ecc.

o la condizione di contenere come parte una curva fissata, non sempre si ottiene un sol sistema irriducibile di curve soddisfacenti alla condizione posta.

OSSERVAZIONE 2^a. — Cade qui in acconcio di osservare pure che « è possibile di costruire su F sistemi completi di ∞^2 sistemi lineari *tutti regolari* » ⁽¹⁾.

Si può infatti costruire anzitutto su F , priva di punti multipli in S_r , un sistema completo (D) formato da ∞^2 sistemi lineari, tutti irriducibili e almeno ∞^2 , e tali inoltre che ogni $|D|$ contenga parzialmente un prefissato sistema $|H|$.

Basta all'uopo scegliere su F un sistema (K) di ∞^2 sistemi lineari, e prender come sistemi $|D|$ i resti dei sistemi $|K|$ rispetto al sistema lineare staccato su F dalle forme d'ordine l abbastanza alto.

Se, dopo ciò, $|H'|$ denota il sistema aggiunto ad $|H|$, esiste per ogni $|D|$ il sistema lineare $|D'| = |D + H' - H|$ aggiunto a $|D|$. Ogni sistema $|D'|$, essendo allora aggiunto ad un sistema lineare irriducibile, almeno ∞^2 , è regolare ⁽²⁾, e (D') è perciò formato da ∞^2 sistemi tutti regolari.

In tal caso ogni curva del sistema irriducibile completo $\{D'\}$ individua un sistema lineare completo, che non può esorbitare da $\{D'\}$, sicchè le curve di (D') son tutte e sole quelle di $\{D'\}$.

Una conseguenza immediata di questa osservazione è che:

« Se su F si hanno due sistemi lineari $|A|$, $|B|$ appartenenti ad un « medesimo sistema irriducibile completo di sistemi lineari, se cioè, con la « notazione introdotta ne' miei lavori sulla base, $A \equiv B$, le curve A , B « possono considerarsi come resti di una medesima curva C rispetto ad un « sistema irriducibile di curve » ⁽³⁾.

È chiaro infatti che ognuno dei sistemi $|D'|$ sopra costruiti, quando l è abbastanza grande, contiene parzialmente A . Presa allora come curva C un resto di A rispetto ad un prefissato $|D'|$, il sistema $|C + B|$ appartiene al sistema $(C + A) = (D')$, e perciò la curva $C + B$ appartiene a $\{D'\}$.

OSSERVAZIONE 3^a. — Le considerazioni esposte nei nn. 7 e 8 si trasportano senz'altro ai sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari di varietà a $k - 1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

⁽¹⁾ Ved. a tal uopo il n. 14 della citata Memoria di Albanese, ove l'osservazione è maggiormente determinata. Qui mi basta quel che espongo allo scopo di giustificare una affermazione contenuta nella nota (1) a piè della pag. 459 del presente lavoro.

⁽²⁾ Ved. la mia Nota citata, *Sulla regolarità del sistema aggiunto, ecc.*

⁽³⁾ Cfr. con la nota (1) a pag. 459.

Fisica Matematica. — *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell.* Nota I del Corrispondente O. TEDONE.

I.

1. Se indichiamo con \mathcal{E} ed \mathcal{H} la forza elettrica e la forza magnetica, con c la velocità della luce nel vuoto, con ε e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica, con λ la conducibilità, le equazioni delle vibrazioni elettromagnetiche di Maxwell in un mezzo omogeneo ed isotropo e nella ipotesi che nel campo possano aver luogo, oltre a correnti di spostamento e a correnti voltaiche, anche correnti di convezione la cui densità, dato che esse si debbano prendere in considerazione, in misura elettrostatica, indicheremo con f , si scrivono

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} c \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathcal{E} + 4\pi f, \\ c \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{H} = 0. \end{array} \right.$$

Di queste equazioni, però, l'ultima è soddisfatta ad ogni istante, in conseguenza della seconda, se è soddisfatta all'istante iniziale, e si può quindi trascurare.

In questa Nota ci proponiamo di determinare l'integrale indefinito delle (1) col metodo delle caratteristiche, nella ipotesi che sia conosciuta, ad ogni istante, la distribuzione, nel campo, del vettore f ; e di ricavarne alcune immediate conseguenze.

A vero dire, per $\lambda = 0$, ossia nel caso in cui le equazioni (1) traducono le leggi elementari secondo cui varia un campo elettromagnetico nell'interno di un dielettrico o nel vuoto, e nella ipotesi che, come abbiamo detto, sia nota la distribuzione del vettore f anche al variare del tempo, le equazioni stesse si possono considerare come un caso particolare delle equazioni delle vibrazioni di un solido elastico, omogeneo ed isotropo, come il caso particolare delle dette equazioni, cioè, in cui la velocità di propagazione delle onde longitudinali, nel corpo elastico, possa considerarsi come infinitamente piccola rispetto alla velocità di propagazione delle onde trasversali. La quistione della integrazione delle equazioni (1), in questo caso, almeno, potrebbe intanto ritenersi risolta ⁽¹⁾. Ma anche pel caso, più ge-

⁽¹⁾ Tedone, *Sulle vibrazioni dei corpi solidi* ecc. Mem. dell'Acc. di Torino, ser. II, tomo XLVII. Fra i molti lavori che più o meno direttamente si ricollegano alla nostra

nerale di $\lambda \neq 0$, il Birkeland ⁽¹⁾ ha costruito delle formole d'integrazione e delle (1) che possono considerarsi come l'estensione, alle dette equazioni, della formola di Poisson relativa all'equazione dei potenziali ritardati. Riconosciamo ancora che l'applicazione del metodo delle caratteristiche alla integrazione delle (1) non presenta nuove difficoltà di principii. Pure, pensando alla grande importanza delle equazioni di Maxwell; al fatto che queste equazioni hanno delle leggi di simmetria proprie, più semplici di quelle delle vibrazioni elastiche, per cui il calcolo della soluzione delle prime equazioni, fatto direttamente, si svolge in modo notevolmente diverso da quello della soluzione delle seconde; che, in ogni modo, conviene di avere le formole d'integrazione delle (1), come di ogni equazione, o sistema, sotto la forma che è a loro la più appropriata se, come noi abbiamo in animo di fare, si vogliano applicare queste formole alla risoluzione di speciali quistioni, ci siamo creduti giustificati di dedicare all'argomento due, non lunghe, Note.

2. Pel nostro scopo converrà trasformare le (1) ponendo

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{X} e^{-kt} \quad , \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{U} e^{-kt} \quad , \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{C} e^{-kt} \quad , \quad k = \frac{2\pi\lambda}{\varepsilon}$$

per cui esse diventano

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{c}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathfrak{U} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + k\mathfrak{X} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathfrak{C} \quad , \\ \frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{X} = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + k\mathfrak{U} \end{cases} .$$

e formano, così trasformate, un sistema di equazioni aggiunto di se stesso.

Notiamo, ora, che, se indichiamo con \mathfrak{X}_1 e \mathfrak{U}_1 due altri vettori soddisfacenti alle (1') quando $c = 0$, sussiste la relazione

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U} \times \mathfrak{X}_1) - \\ & - \operatorname{div} \left\{ \frac{c}{\varepsilon} (\mathfrak{U} \wedge \mathfrak{U}_1) + \frac{c}{\mu} (\mathfrak{X} \wedge \mathfrak{X}_1) \right\} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathfrak{C} \times \mathfrak{U}_1 = 0 . \end{aligned}$$

quistione, citiamo: Love, *Proceedings of the London Math. Soc.*, ser. 2^a, vol. I (1904), pag. 291; Somigliana, *Atti dell'Acc. di Torino*, vol. XLI, adunanze 19-XI-1905, 13-V-1906, 17-VI-1906 e 14-IV-1907; Tedone, idem, vol. XLII, adunanze 18-XI-1906 e 24-II-1907. I lavori sopracitati del Love e del Somigliana si propongono, principalmente, di estendere alle equazioni delle vibrazioni elastiche la celebre formola di Kirchhoff che esprime analiticamente il principio di Huygens. La integrazione delle (1), con formole che possono considerarsi come l'estensione, al suo caso, della formola di Poisson appresso citata nel testo, è stata data, per $\lambda = 0$, da M. Abraham, *Theorie der Elekt.*, II, pag. 37 e seg. (Teubner, Leipzig 1905).

⁽¹⁾ Comptes rendus, tomo CXX (1895); Archive de Genève, tomo XXXIV (1895).

Se quindi introduciamo nelle nostre considerazioni lo spazio lineare a quattro dimensioni in cui t e le coordinate cartesiane x, y, z dello spazio ordinario indicano le coordinate di un punto; chiamiamo $(X, Y, Z), (U, V, W), (u, v, w)$ le componenti dei tre vettori $\mathfrak{X}, \mathfrak{U}$ e c e con $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ le componenti dei due vettori \mathfrak{X}_1 e \mathfrak{U}_1 ; dinotiamo con σ_3 una varietà regolare, chiusa, a tre dimensioni dello spazio (x, y, z, t) limitante la regione S_4 all'interno della quale le funzioni $X, Y, \dots, W; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_3; u, v, w$ sono regolari, potremo scrivere un teorema di reciprocità, per le (1'), nello spazio stesso (x, y, z, t) , sotto la forma

$$(4) \quad \int_{\sigma_3} [X \varphi_1 + Y \varphi_2 + Z \varphi_3 - (U \Phi_1 + V \Phi_2 + W \Phi_3)] d\sigma_3 - \\ - \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_{S_4} (u \psi_1 + v \psi_2 + w \psi_3) dS_4 = 0.$$

Ed è, in questa equazione,

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \varphi_1 \cos nt + \frac{c}{\varepsilon} (\psi_2 \cos nz - \psi_3 \cos ny), \\ \Psi_1 = \psi_1 \cos nt - \frac{c}{\mu} (\varphi_2 \cos nz - \varphi_3 \cos ny), \end{cases}$$

n essendo la normale a σ_3 diretta verso l'interno di S_4 , mentre Φ_2, Φ_3 e Ψ_2, Ψ_3 si deducono, rispettivamente, da Φ_1 e Ψ_1 con permutazioni circolari di $x, y, z; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Chiameremo $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$ le funzioni associate a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$.

3. Nel seguito le coordinate di un punto variabile nel nostro spazio a quattro dimensioni saranno indicate con ξ, η, ζ, τ , mentre chiameremo x, y, z, t le coordinate di un punto fisso dello stesso spazio. Tenendo conto di ciò, si prova immediatamente che si può porre

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}, & \varphi_3 = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \psi_1 = \frac{c}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} \right), & \psi_2 = - \frac{c}{\mu} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta}, & \psi_3 = - \frac{c}{\mu} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \zeta}, \end{cases}$$

ovvero

$$(6') \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} \right), & \varphi_2 = - \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta}, & \varphi_3 = - \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \zeta}, \\ \psi_1 = 0, & \psi_2 = - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}, & \psi_3 = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{cases}$$

purchè, in entrambi i casi, sia

$$(7) \quad C^2 \Delta^2 \Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau^2} + k^2 \Omega = 0, \quad C^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}.$$

Le (6') si deducono dalle (6) mutando $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in $-\psi_1, -\psi_2, -\psi_3$; ψ_1, ψ_2, ψ_3 in $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; ε in μ e k in $-k$. Inoltre, fissato Ω , possiamo costruire, oltre alle soluzioni (6) e (6'), altre quattro soluzioni particolari delle (1'), per $c = 0$, permutando circolarmente, nelle (6) e (6'), le lettere ξ, η, ζ e gli indici 1, 2, 3. Dinoteremo queste sei soluzioni particolari delle (1') con $c = 0$, che si possono formare con la stessa funzione Ω con i simboli

$$(8) \quad \varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,3}; \psi_{i,1}, \psi_{i,2}, \psi_{i,3}; i = 1, 2, \dots, 6,$$

convenendo di rappresentare, con questi simboli, la soluzione (6) quando ad i si dà il valore 1, la soluzione (6'') quando ad i si dà il valore 4, e, infine, le soluzioni che si ottengono dalle (6) e (6') con le indicate permutazioni circolari, con gli stessi simboli quando ad i si danno, rispettivamente, i valori 2, 3, ovvero 5, 6. Le funzioni associate delle (8) saranno indicate con i simboli corrispondenti

$$(8') \quad \Phi_{i,1}, \Phi_{i,2}, \Phi_{i,3}; \Psi_{i,1}, \Psi_{i,2}, \Psi_{i,3}.$$

4. Supporremo, ora, che la funzione Ω con cui intendiamo di aver costruito le sei soluzioni (8) delle equazioni (1') con $c = 0$, dipenda soltanto da

$$t - \tau \quad \text{e} \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

In questa ipotesi la soluzione (6), ossia quella delle soluzioni (8) che corrisponde al valore 1 di i , può scriversi

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{1,1} = 0, \quad \varphi_{1,2} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad \varphi_{1,3} = -\frac{\partial r}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \\ \psi_{1,1} = \frac{c}{\mu} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\}, \\ \psi_{1,2} = -\frac{c}{\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \psi_{1,3} = -\frac{c}{\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi}; \end{array} \right.$$

ed espressioni analoghe valgono, naturalmente, anche per le altre cinque soluzioni (8).

Pel seguito sarà necessario di calcolare i valori delle funzioni (8'), associate delle funzioni (8), sulla varietà conica Γ caratteristica del sistema di

equazioni (1), ovvero (1'), e di equazione

$$(10) \quad C^2(t - \tau)^2 - r^2 = 0$$

avente il vertice nel punto (x, y, z, t) , e sulla varietà cilindrica γ di equazione

$$(11) \quad r = d,$$

d essendo una costante che poi faremo tendere a zero. Ci limiteremo a scrivere i risultati soltanto pel caso di $i = 1$, deducendosi da questi nel modo più semplice le formole corrispondenti agli altri casi.

A questo scopo notiamo che, se la normale positiva a Γ s'intende diretta all'interno dell'una, o dell'altra, delle regioni $C(t - \tau) - r > 0$, ovvero $C(\tau - t) - r > 0$, a seconda che siamo sulla falda di Γ su cui $t > \tau$, ovvero su quella su cui $t < \tau$, è

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos n\tau = \mp \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} \quad , \quad \cos n\xi = - \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad , \\ \cos n\eta = - \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad , \quad \cos n\zeta = - \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \quad , \end{array} \right.$$

e va scelto, nella prima di queste formole, precisamente, il segno superiore, o l'inferiore, a seconda che siamo nel primo, o nel secondo caso. Notiamo pure che, se indichiamo con l una generatrice qualunque di K il cui senso positivo, su ciascuna delle precedenti falde, sia quello che si allontana dal vertice (x, y, z, t) , è, corrispondentemente alle (12),

$$(12') \quad \frac{d}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \left(C \frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{\partial}{\partial \tau} \right).$$

Sulla varietà γ , invece, facendo coincidere il senso positivo della normale ad essa col senso in cui cresce r , si avrà, più semplicemente,

$$(13) \quad \cos n\tau = 0 \quad , \quad \cos n\xi = \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad , \quad \cos n\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad , \quad \cos n\zeta = \frac{\partial r}{\partial \zeta}.$$

Tenuto conto di questi risultati, si trova subito che, su F , è

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \Phi_{1,1} &= 0, \\ \Phi_{1,2} &= C \left\{ r \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} (2C \mp kr) \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\} \frac{\partial r}{\partial \xi}, \\ \Phi_{1,3} &= -C \left\{ r \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} (2C \mp kr) \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\} \frac{\partial r}{\partial \eta}; \\ \Psi_{1,1} &= \frac{c}{\mu} \left\{ \mp r \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) - k \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \right] \mp \\ &\quad \mp 2 \frac{c}{\mu} \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ \Psi_{1,2} &= \frac{c}{\mu} \left\{ \pm r \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + k \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \\ \Psi_{1,3} &= \frac{c}{\mu} \left\{ \pm r \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + k \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right\} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi}, \end{aligned} \right.$$

e, quindi, che le funzioni $\Phi_{1,1}$, $\Phi_{1,2}$, ..., $\Phi_{1,3}$ si annullano sulla varietà F se su questa varietà si annulla $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$.

Su γ si trova, invece

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \Phi_{1,1} &= 0, \quad \Phi_{1,2} = -\frac{C^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad \Phi_{1,3} = \frac{C^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \eta}; \\ \Psi_{1,1} &= -\frac{c}{\mu} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial r} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ \Psi_{1,2} &= \frac{c}{\mu} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad \Psi_{1,3} = \frac{c}{\mu} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - k \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r}. \end{aligned} \right.$$

Ne viene che, supposto assegnati a $\Phi_{1,1}$, $\Phi_{1,2}$, ..., $\Phi_{1,3}$ i valori (15), l'espressione

$$(16) \quad X \Phi_{1,1} + Y \Phi_{1,2} + Z \Phi_{1,3} - (U \Phi_{1,1} + V \Phi_{1,2} + W \Phi_{1,3}),$$

considerata come funzione di ξ, η, ζ soltanto, avrà un polo di terz'ordine nel punto (x, y, z) se la funzione Ω ne ha uno di primo, in questo punto; e, se

$$\lim_{r=0} r \Omega = A(t - \tau)$$

A essendo simbolo di funzione, il residuo della (16), nel punto (x, y, z) , ossia l'espressione

$$\frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \int_{\omega} [X \varphi_{1,1} + Y \varphi_{1,2} + Z \varphi_{1,3} - (U \Phi_{1,1} + V \Phi_{1,2} + W \Phi_{1,3})] d\omega,$$

dove ω è la superficie sferica di raggio uno col centro nel punto (x, y, z) , è eguale a

$$\frac{C^*}{3} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)_{\xi=x, \eta=y, \zeta=z} A(t - \tau) + \frac{2}{3} \frac{c}{\mu} X(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) A(t - \tau).$$

A causa, poi, delle (1'), il risultato precedente si può porre anche sotto la forma

$$\begin{aligned} (17) \quad & -\frac{1}{3} \frac{c}{\mu} A(t - \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + k \right) X(x, y, z, \tau) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{c}{\mu} X(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) A(t - \tau) - \frac{4\pi}{3} \frac{c}{\varepsilon \mu} u(x, y, z, \tau) A(t - \tau) \\ & = \frac{c}{\mu} X(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) A(t - \tau) - \\ & - \frac{1}{3} \frac{c}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} [X(x, y, z, \tau) A(t - \tau)] - \frac{4\pi}{3} \frac{c}{\varepsilon \mu} u(x, y, z, \tau) A(t - \tau). \end{aligned}$$

5. Si abbia ora una varietà regolare, a tre dimensioni, dello spazio (ξ, η, ζ, τ) incontrata in un punto solo da ogni parallela all'asse τ che l'incontra, potendo, però, la retta stessa, come caso limite, in tutto, o in parte, appartenere alla varietà stessa. Supponiamo che il vertice (x, y, z, t) della varietà Γ sia in tale posizione, rispetto alla varietà precedente, che nella regione S_4 limitata da Γ e dalla porzione σ_3 della varietà stessa, sia $t > \tau$ e $t - \tau > r$. Le nostre considerazioni, del resto, soffrono soltanto lievi modificazioni, che facilmente si scorgono, se nella regione S_4 di cui parliamo, fosse $t < \tau$ e $\tau - t > r$. Ciò posto, se (X, Y, \dots, W) è una soluzione qualunque delle (1'), regolare in S_4 , applicheremo la (4) alla soluzione precedente delle (1') ed alla soluzione $(\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \dots, \psi_{1,3})$ delle (1') stesse quando in esse si faccia $c = 0$, costruite con la funzione Ω soggetta alle sole condizioni precedenti, e nella regione S'_4 limitata da Γ, γ e da una corrispondente porzione σ'_3 di σ_3 . Col solito procedimento, andando al limite

per $d = 0$, si trova allora

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \frac{c}{\mu} \int_{t_0}^t X(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) A(t - \tau) d\tau = \\
 & = -\frac{1}{3} \frac{c}{\mu} X_0 A(t - t_0) + \frac{4\pi}{3} \frac{c}{\epsilon \mu} \int_{t_0}^t u(x, y, z, \tau) A(t - \tau) d\tau \\
 & \quad - \lim_{d=0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [X \varphi_{1,1} + Y \varphi_{1,2} + Z \varphi_{1,3} - \right. \\
 & \quad \left. - (U \varphi_{1,1} + V \varphi_{1,2} + W \varphi_{1,3})] d\sigma_3 - \frac{1}{\epsilon} \int_{S_4} (u \psi_{1,1} + v \psi_{1,2} + w \psi_{1,3}) dS_4 \right\}
 \end{aligned}$$

t_0 essendo il valore di τ nel punto d'incontro della retta $r = 0$ con la varietà σ_3 , ed X_0 il valore di X in questo punto.

6. La formola precedente suppone che la funzione Ω , con cui si intendono costruite le funzioni $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{1,3}$, soddisfi all'equazione (7), dipenda solo da $t - \tau$ e da r , sia tale che $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ si annulli su F e che, inoltre, $\lim_{r=0} r \Omega = A(t - \tau)$. Essa contiene degli integrali impropri; però, senza bisogno di precisare ulteriormente la funzione Ω , possiamo sempre trasformare il secondo membro della (18) in modo da eliminare questi integrali impropri col metodo adoperato nella Memoria citata, alquanto modificato. Si noti, per ciò, che

$$\begin{aligned}
 & X \varphi_{1,1} + Y \varphi_{1,2} + Z \varphi_{1,3} - (U \varphi_{1,1} + V \varphi_{1,2} + W \varphi_{1,3}) = \\
 & = -\Sigma \varphi_{1,1} \left[U \cos n\tau - \frac{c}{\mu} (Y \cos n\xi - Z \cos n\eta) \right] + \\
 & \quad + \Sigma \psi_{1,1} \left[X \cos n\tau + \frac{c}{\epsilon} (V \cos n\xi - W \cos n\eta) \right]
 \end{aligned}$$

dove il simbolo Σ è il simbolo di una sommatoria di tre termini di cui è scritto il primo soltanto, e gli altri due si deducono dal primo con permutazioni circolari. I coefficienti di $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{1,3}$ nelle due precedenti sommatorie non sono altro che le funzioni associate di X, Y, \dots, W . Dalla trasformazione precedente risulta che gli integrali impropri che compaiono nella (18) sono gli integrali estesi a σ_3 o a S_4 , sotto il segno dei quali comparisce una funzione avente per fattore una delle tre funzioni $\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,3}$ le di cui espressioni si trovano fra le (6).

Indichiamo, ora, con S la regione dell'iperpiano $\tau = t_0$ del nostro spazio a quattro dimensioni su cui si proietta σ_3 , e con S' quella in cui si pro-

ietta σ'_3 . Se α è una funzione qualunque di ξ, η, ζ , potremo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\sigma'_3} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} d\sigma_3 &= \int_{S'} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} \frac{dS}{\cos n\tau} = \\ &= - \int_{S'} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{\cos n\tau} \right) dS - \int_{\sigma} \frac{\alpha}{\cos n\tau} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} d\sigma, \end{aligned}$$

σ essendo la superficie sferica di raggio d intersezione dell'iperpiano $\tau = t_0$ e della varietà γ , e tenuto conto che $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$ si annulla sulla superficie intorno di S . Di qui si ricava subito

$$\lim_{d=0} \int_{\sigma'_3} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} d\sigma_3 = - \int_S \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\alpha}{\cos n\tau} \right) dS + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{\cos n\tau} \right)_0 A(t - t_0)$$

e, se supponiamo che su F si annulli pure Ω , varranno le formole seguenti

$$(19) \quad \begin{cases} \lim_{d=0} \int_{\sigma'_3} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} d\sigma_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\sigma_3} \alpha \Omega d\sigma_3 + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha}{\cos n\tau} \right)_0 A(t - t_0), \\ \lim_{d=0} \int_{\sigma'_3} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} d\sigma_3 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{\sigma_3} \alpha \Omega d\sigma_3, \end{cases}$$

insieme con tutte quelle altre che si ottengono dalle precedenti permutando circolarmente x, y, z .

In modo analogo, dalla relazione

$$\int_{S'_4} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} dS_4 = - \int_{S'_0} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} dS_4 - \int_{\sigma_3} \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \cos n\xi d\sigma_4 - \int_{\gamma} \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} d\gamma,$$

dove con γ , nella formola precedente, intendiamo la porzione della varietà γ che appartiene al contorno di S'_4 , si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{d=0} \int_{S'_4} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} dS_4 &= \\ &= - \int_{S_4} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} dS_4 - \int_{\sigma_3} \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \cos n\xi d\sigma_3 + \frac{4\pi}{3} \int_{t_0}^t \alpha A(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{S_4} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \Omega dS_4 + \int_{\sigma_3} \alpha \Omega \cos n\xi d\sigma_3 \right\} + \frac{4\pi}{3} \int_{t_0}^t \alpha A(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{S_4} \alpha \Omega dS_4 + \frac{4\pi}{3} \int_{t_0}^t \alpha A(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Valgono, quindi, anche le formole

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{d=0} \int_{S_4} \alpha \frac{\partial^3 \Omega}{\partial \xi^2} dS_4 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{S_4} \alpha \Omega dS_4 + \frac{4\pi}{3} \int_{t_0}^t \alpha A(t-\tau) d\tau, \\ \lim_{d=0} \int_{S_4} \alpha \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} dS_4 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{S_4} \alpha \Omega dS_4, \end{aligned} \right.$$

e le altre che da queste si ottengono mutando circolarmente x, y, z , nelle stesse ipotesi in cui valgono le (19).

In conseguenza di ciò, possiamo porre la (18) sotto la forma

$$(18') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c}{\mu} \int_{t_0}^t X(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) A(t-\tau) d\tau = \\ &= - \left[\frac{c}{\mu} X + \frac{2}{3} C^2 \frac{V \cos n\xi - W \cos n\eta}{\cos n\tau} \right]_0 A(t-t_0) + \\ &+ 4\pi \frac{c}{\varepsilon \mu} \int_{t_0}^t u(x, y, z, \tau) A(t-\tau) d\tau - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \right) G_3 - \frac{c}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} v \Omega dS_4 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(F_1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} u \Omega dS_4 \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \right) G_2 - \frac{c}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(F_1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} u \Omega dS_4 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(F_3 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} w \Omega dS_4 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$(21) \quad F_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} \left[X \cos n\tau + \frac{c}{\varepsilon} (V \cos n\xi - W \cos n\eta) \right] \Omega d\sigma_3,$$

$$(21') \quad G_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} \left[U \cos n\tau - \frac{c}{\mu} (Y \cos n\xi - Z \cos n\eta) \right] \Omega d\sigma_3,$$

mentre F_2, F_3 e G_2, G_3 si deducono, rispettivamente, da F_1 e G_1 con permutazioni circolari.

In modo perfettamente analogo si trova

$$(18'') \left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{\varepsilon} \int_{t_0}^t U(x, y, z, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + k \right) A(t - \tau) d\tau = \\ & = - \left[\frac{c}{\varepsilon} U - \frac{2}{3} C^2 \frac{Y \cos n\zeta - Z \cos n\eta}{\cos n\tau} \right]_0 A(t - t_0) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \right) \left(F_3 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} w \Omega dS_4 \right) + \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \right) \left(F_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} v \Omega dS_4 \right) + \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

E, con rotazioni circolari, dalle (18') e (18'') si deducono altre quattro formole contenenti ai primi membri, rispettivamente, $Y, Z,$ e $V, W,$ sotto l'integrale.

7. Se poniamo

$$(22) \quad \theta = \frac{r^2}{C^2(t - \tau)^2}, \quad \varrho = \frac{k}{C} \sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2},$$

si soddisfa a tutte le condizioni che si sono imposte ad Ω , e sotto le quali valgono le formole precedenti, prendendo, per Ω ,

$$(23) \quad \Omega^{(n)} = \frac{(t - \tau)^n}{r} (1 - \theta)^n F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, n+1, 1 - \theta\right) \frac{I_n(\varrho)}{\varrho^n}$$

con n numero intero arbitrario maggiore di uno e dove, al solito, F è simbolo di funzione ipergeometrica ed $I_n(\varrho)$ è la funzione di Bessel d'ordine n

$$I_n(\varrho) = \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2i+n}}{i!(i+n)!}.$$

Sarà, per conseguenza,

$$(24) \quad \begin{aligned} A^{(n)}(t - \tau) &= \lim_{r=0} r \Omega^{(n)} = F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, n+1, 1\right) \frac{I_n[k(t - \tau)]}{k^n} = \\ &= \frac{H(n) H\left(-\frac{1}{2}\right)}{H\left(\frac{n-1}{2}\right) H\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{I_n[k(t - \tau)]}{k^n} = \frac{2^n}{k^n} I_n[k(t - \tau)], \end{aligned}$$

dove con $A^{(n)}$ intendiamo, quindi, la funzione A corrispondente ad $\Omega^{(n)}$. La funzione $\Omega^{(2)}$ si può porre sotto la forma più semplice,

$$(23') \quad \Omega^{(2)} = \frac{4}{C^2} r \left[\frac{C(t-\tau)}{r} - 1 \right]^2 \frac{I_2(\varrho)}{\varrho^2}.$$

Per determinare, ora, le funzioni X, Y, \dots, W , nel modo più comodo, sono sufficienti le formole trovate e costruite con la funzione $\Omega = \Omega^{(2)}$, nel caso di $k=0$; nel caso generale è sufficiente la considerazione dei due sistemi di formole corrispondenti alle scelte $\Omega = \Omega^{(2)}$ e $\Omega = \Omega^{(3)}$. Se, per semplicità, indichiamo con $O_1^{(2)}, O_1^{(3)}$ i secondi membri della (18') costruiti, rispettivamente, con le funzioni $\Omega^{(2)}$ e $\Omega^{(3)}$, divisi per 2^2 il primo, per 2^3 il secondo, potremo scrivere le due formole

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu k^2} \int_{t_0}^t X(\dots) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) I_2[k(t-\tau)] d\tau = \\ = - \frac{c}{\mu k^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \right) \int_{t_0}^t X(\dots) I_2[k(t-\tau)] d\tau = O_1^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu k^3} \int_{t_0}^t X(\dots) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - k \right) I_3[k(t-\tau)] d\tau = \\ = - \frac{c}{\mu k^3} \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \right) \int_{t_0}^t X(\dots) I_3[k(t-\tau)] d\tau = O_1^{(3)} \end{aligned}$$

le quali sono equivalenti alle altre

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{c}{\mu k^2} \int_{t_0}^t X(\dots) I_2[k(t-\tau)] d\tau = - e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{kt} O_1^{(2)} dt, \\ \frac{c}{\mu k^3} \int_{t_0}^t X(\dots) I_3[k(t-\tau)] d\tau = - e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{kt} O_1^{(3)} dt. \end{cases}$$

Da queste ultime equazioni si ottiene, successivamente,

$$\frac{c}{\mu k} \int_{t_0}^t X(\dots) I_1[\dots] d\tau = k e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{kt} (2 O_1^{(2)} + k O_1^{(3)}) dt - 2 O_1^{(2)},$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \int_{t_0}^t X(\dots) I_0[\dots] d\tau = \\ = - k^2 e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{kt} (3 O_1^{(2)} + 2k O_1^{(3)}) dt - 4 \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \right) O_1^{(2)} + 2k^2 O_1^{(3)}. \end{aligned}$$

e, da queste, infine,

$$(26) \quad \frac{c}{\mu} X(x, y, z, t) = k^3 e^{-kt} \int_{t_0}^t e^{kt} (O_1^{(2)} + k O_1^{(3)}) dt - \\ - 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \right) \left(2 \frac{\partial O_1^{(2)}}{\partial t} - k^2 O_1^{(3)} \right) - k^2 O_1^{(2)}.$$

Se, allo stesso modo che abbiamo indicato con $O_1^{(n)}$ il secondo membro della (18') costruito con la funzione $\Omega^{(n)}$, indichiamo con $O_4^{(n)}$ il secondo membro della (18'') costruito con la stessa funzione $\Omega^{(n)}$, e, quindi, rispettivamente, con $O_2^{(n)}$, $O_3^{(n)}$ e con $O_5^{(n)}$, $O_6^{(n)}$ le espressioni che si ottengono da $O_1^{(n)}$ e $O_4^{(n)}$ con le solite permutazioni circolari, il valore di U , nel punto (x, y, z, t) , sarà dato dalla formola stessa (26) quando, in essa, al posto di μ , X e delle $O_1^{(n)}$, si sostituiscano ε , U e le $O_4^{(n)}$ con gli stessi apici; mentre dalla (26) e da quest'ultima formola si dedurranno, poi, i valori di Y, Z, V, W con le permutazioni circolari solite e mutando gli indici 1 e 4 di $O^{(n)}$, rispettivamente, in 2, 3, o in 5, 6.

8. Le nostre formole si semplificano nel modo più notevole quando si supponga $k = 0$. In questo caso abbiamo, infatti, semplicemente

$$(26') \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{\mu} X(x, y, z, t) = \\ & = \left[\frac{c}{\mu} X + \frac{2}{3} C^2 \frac{V \cos n\xi - W \cos n\eta}{\cos n\tau} \right]_0 - \frac{4\pi c}{\varepsilon \mu} \int_{t_0}^t u(x, y, z, \tau) d\tau + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial G_3}{\partial t} - \frac{c}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{v}{r} dS_4 \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(F_1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{u}{r} dS_4 \right) \right] \right\} - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{c}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(F_1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{u}{r} dS_4 \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(F_3 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{w}{r} dS_5 \right) \right] \right\}; \\ & \frac{c}{\varepsilon} U(x, y, z, t) = \left[\frac{c}{\varepsilon} U - \frac{2}{3} C^2 \frac{Y \cos n\xi - Z \cos n\eta}{\cos n\tau} \right]_0 - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(F_3 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{w}{r} dS_4 \right) + \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \right\} + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(F_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_4} \frac{v}{r} dS_4 \right) + \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

l'angolo del piano tangente alla superficie proiezione col piano osculatore. Si ha $z_{n-3}^{(01)} = \operatorname{tg} \lambda$, quindi

$$1/q_{n-1} = \sqrt{-k}/\operatorname{tg} \lambda.$$

È questa una prima interpretazione geometrica, che estende in un certo senso il teorema di Enneper: tuttavia, questo teorema non rientra nel nostro, per la dimostrazione del quale è necessariamente $n > 3$. Del resto, se si volesse interpretare formalmente la relazione precedente anche nello spazio ordinario si otterrebbe al secondo membro un'espressione d'apparenza indeterminata.

8. Si può dare un'altra interpretazione della $(n-1)$ -esima curvatura della quasi-asintotica, introducendo la considerazione della curvatura totale (gaussiana) della superficie data (¹)

$$K = \frac{D D'' - D'^2}{I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2},$$

ove

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{1001} I_{1001}) D = \begin{vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & . & . & . & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & . & . & . & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(20)} & y^{(20)} & z_1^{(20)} & . & . & . & z_{n-2}^{(20)} \end{vmatrix}$$

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{0110} I_{1001}) D'' = \begin{vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & . & . & . & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & . & . & . & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(02)} & y^{(02)} & z_1^{(02)} & . & . & . & z_{n-2}^{(02)} \end{vmatrix}$$

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{0110} I_{1001}) D' = \begin{vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & . & . & . & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & . & . & . & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(11)} & y^{(11)} & z_1^{(11)} & . & . & . & z_{n-2}^{(11)} \end{vmatrix}$$

$$I_{hklm} = I_{lmhk} = x^{(hk)} x^{(lm)} + y^{(hk)} y^{(lm)} + \sum_1^{n-2} z_i^{(hk)} z_i^{(lm)}.$$

Se si calcola K nell'origine, tenendo conto delle semplificazioni appportate dalla scelta degli assi, si trova:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} 1 + S(z_i^{(01)})^2 & S z_i^{(01)} z_i^{(02)} \\ S z_i^{(01)} z_i^{(20)} & S z_i^{(01)} z_i^{(03)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 + S(z_i^{(01)})^2 & S z_i^{(01)} z_i^{(11)} \\ S z_i^{(01)} z_i^{(11)} & S(z_i^{(11)})^2 \end{vmatrix}}{[1 + S(z_i^{(01)})^2]^2} - \frac{(z_i^{(11)})^2}{1 + S(z_i^{(01)})^2},$$

il segno S indicando la somma estesa da $i = 1$ ad $i = n - 3$.

(¹) E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* [Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. X (1908)], pag. 16.

Si consideri ora la proiezione ortogonale della superficie sullo S_{n-1} osculatore, e si calcoli la curvatura gaussiana di essa nell'origine, K' . Si trova subito ch'essa differisce da K solo per il sottraendo: e precisamente

$$\frac{(z_{n-2}^{(1)})^2}{1 + S(z_i^{(01)})^2} = K' - K.$$

Si ha quindi

$$1/\varrho_{n-1} = \pm z_{n-2}^{(1)}/z_{n-3}^{(01)} = \pm \sqrt{K' - K} \frac{\sqrt{1 + S(z_i^{(01)})^2}}{z_{n-3}^{(01)}}.$$

È facile interpretare il 2° fattore a secondo membro. Le equazioni del piano tangente alla superficie nell'origine sono

$$\begin{aligned} z_i &= z_i^{(01)} y & (i = 1, \dots, n-3) \\ z_{n-2} &= 0; \end{aligned}$$

quindi l'inverso di quel fattore è uguale al coseno dell'angolo ω del piano tangente con la $(n-2)$ -esima normale. Quindi:

$$\frac{\cos \omega}{\varrho_{n-1}} = \pm \sqrt{K' - K}.$$

La $(n-1)$ -esima curvatura di una quasi-asintotica in un punto, moltiplicata per il coseno dell'angolo che la $(n-2)$ -esima normale principale forma col piano ivi tangente alla superficie, è uguale alla radice quadrata della differenza fra la curvatura gaussiana della proiezione normale della superficie sullo S_{n-1} osculatore alla curva e la curvatura gaussiana della superficie stessa nel punto considerato.

9. Il teorema così enunciato contiene quello di Enneper; infatti si ha, in esso, $\omega = 0$ (angolo della normale principale col piano tangente) e $K' = 0$ (considerando il piano tangente come proiezione normale della superficie su di esso); quindi $1/\varrho_2 = \sqrt{-K}$. Però questa deduzione non è valida per dimostrazione, esigendo questa che sia $n > 3$.

Ognuna delle espressioni date di $1/\varrho_{n-1}$ (nn. 7 e 8) ha i propri vantaggi: la prima non richiede se non la considerazione della *curvatura gaussiana di una superficie in S_3* ; la seconda richiede invece nozioni un poco più elevate, ma in compenso è più semplice ad enunciarsi e mostra inoltre che $|\cos \omega/\varrho_{n-1}|$ ha lo stesso valore per le due quasi-asintotiche che hanno in un punto comune lo stesso iperpiano osculatore (¹).

(¹) Il teorema di Enneper vale per le superficie a punti planari parabolici, che posseggono cioè un sistema semplice di asymptotiche (v. Levi, loc. cit., n. 50): il che è quasi evidente, e non c'informa affatto sulla natura di una superficie generale (proiettivamente) nel suo spazio, essendo quelle superficie del tutto eccezionali.

Le quasi-asintotiche costituiscono invece, anche dal punto di vista metrico, la naturale estensione delle asymptotiche.

Matematica. — *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Nota III di U. CISOSSI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nelle prime due Note, pubblicate in questi Rendiconti ⁽¹⁾, ho mostrato come, sapendo risolvere i problemi di Dirichlet e di Neumann in un campo S ⁽²⁾, essi possano risolversi in un campo S' , deformato infinitesimo di S .

Detti σ e σ' i contorni di S e S' , la corrispondenza tra le coppie di punti Q e Q' di detti contorni viene stabilita per mezzo della relazione vettoriale

$$(I) \quad Q' = Q + \varepsilon n,$$

dove ε è funzione assegnata dei punti Q di σ ed n è il vettore unitario, normale a σ in Q e diretto verso S . Trattandosi di deformazione di primo ordine, la funzione ε va trattata come tale rispetto alle dimensioni lineari di σ ⁽³⁾.

⁽¹⁾ *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Note I e II, vol. 413, pp. 499.

⁽²⁾ Trattasi della determinazione di una funzione armonica e regolare in S , dati i valori al contorno della funzione stessa (problema di Dirichlet) oppure della sua derivata normale (problema di Neumann), e — se il campo si estende all'infinito — soddisfacente alle consuete condizioni all'infinito.

⁽³⁾ Veramente per caratterizzare in modo completo la deformazione di S , cioè il passaggio da S ad S' , bisognerebbe assegnare lo spostamento s di ogni punto P di S ; talchè la corrispondenza tra le coppie di punti P e P' di S ed S' risulterebbe definita dalla seguente relazione vettoriale:

$$(II) \quad P' = P + s.$$

La relazione (I), che stabilisce la corrispondenza solamente fra i punti Q e Q' dei contorni σ e σ' di S e S' , si deduce facilmente dalle precedenti riportandosi al contorno e ponendo

$$\varepsilon = s \times n.$$

Si sarà già notato [cfr. la Nota I] che, per la risoluzione in S' del problema di Dirichlet, basta soltanto la conoscenza di ε nei punti di σ . Per la risoluzione del problema di Neumann [cfr. la Nota II] interviene il vettore v che implica la conoscenza su σ , oltre che di s , anche di $\text{grad } \varepsilon$, per il che interessa assegnare la (II), almeno nello spazio compreso tra le superficie σ e σ' .

1. Si potranno, in particolare, determinare le funzioni di Green e di Neumann in S' .

In modo preciso, fissato un punto P_1 di S' , si sanno determinare due funzioni G'^* e F'^* dei punti P' di S' , regolari e armoniche, e soddisfacenti, sul contorno σ' (oltre che alle eventuali, ben note, condizioni all' ∞ — se S e quindi S' si estendono all'infinito —) alle seguenti condizioni:

$$G'^* = \frac{1}{\text{mod}(Q' - P_1)} \quad , \quad \frac{dF'^*}{dn'} = \frac{4\pi}{\sigma'} - \frac{d}{dn'} \frac{1}{\text{mod}(Q' - P_1)} \quad ,$$

dove n' designa ovviamente la direzione della normale nel punto Q' a σ' , volta verso S' .

Una volta costruite, col procedimento indicato nelle Note citate, le funzioni G'^* e F'^* , si otterranno la funzione G' di Green e la funzione F' di Neumann relativa al campo S' , ponendo

$$G'(P', P_1) = \frac{1}{\text{mod}(P' - P_1)} - G'^*(P', P_1) \quad ,$$

$$F'(P', P_1) = - \frac{1}{\text{mod}(P' - P_1)} - F'^*(P', P_1) \quad .$$

Si possono allora scrivere senz'altro le formole risolutive dei problemi armonici in S' .

Esse sono, com'è noto, le seguenti:

$$U(P') = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'} U(Q') \cdot \frac{dG'(P', Q')}{dn'} d\sigma' \quad ,$$

$$U(P') = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'} \frac{dU(Q')}{dn'} F'(P', Q') d\sigma' \quad ,$$

dove U_0 è una costante, a priori arbitraria, che rappresenta la media dei valori assunti dalla funzione U sulla superficie σ' .

2. Supponiamo ora S' non più infinitamente prossimo ad S , ma qualsiasi, purchè si possa considerare proveniente da S per deformazione continua.

Si immagini di passare dalla configurazione S alla configurazione S' mediante un numero m , sufficientemente grande, di tappe successive. Indichiamo con

$$S_1, S_2, \dots, S_m$$

le corrispondenti configurazioni assunte dal campo iniziale S . Ciascuna di queste configurazioni si intende prossima tanto a quella che precede quanto a quella che segue, nel senso accennato nelle Note citate e dianzi richiamato.

Si supponga di saper risolvere i problemi armonici in S . Ciò significa, in sostanza, di conoscere le funzioni di Green (pel problema di Dirichlet) e di Neumann (pel secondo problema) relative ad S .

Allora il procedimento, che ha formato oggetto delle Note citate, mostra come si possano risolvere i problemi stessi nel campo S_1 , immediatamente prossimo ad S . In particolare, come si è visto, si possono determinare in S_1 le corrispondenti funzioni di Green e di Neumann.

La conoscenza di tali funzioni relative ad S_1 consente — mediante l'applicazione del medesimo procedimento — la risoluzione dei problemi armonici nel campo S_2 , immediatamente successivo ad S_1 ; in particolare (come già precedentemente) la costruzione delle funzioni di Green e di Neumann relative ad S_2 . Queste consentiranno di effettuare la risoluzione dei problemi armonici in S_3 e così via.

È manifesto che, così procedendo, si arriverà alla costruzione delle funzioni di Green e di Neumann in S_m , ciò che è sufficiente a risolvere i problemi armonici in S' .

3. Si immagini, in particolare, che lo spazio S' si possa ottenere per deformazione continua da una sfera S , e sia S' interno ad S , se si tratta di risolvere problemi armonici interni, oppure sia S' esterno ad S , nei problemi armonici esterni.

Siccome per la sfera S si sanno risolvere i problemi armonici, così per quanto siamo venuti dicendo si sapranno risolvere anche per il campo S' .

È quasi superfluo il far rilevare che la risolubilità dei problemi armonici essendo intimamente legata alla natura geometrica del campo e non alla misura delle sue dimensioni, una volta assodato che il campo S' è di tale natura da potersi ricavare per deformazione continua da uno spazio sferico S , si potrà sempre scegliere questo di raggio così grande, quando trattasi di problemi armonici interni, oppure di raggio sufficientemente piccolo, nei problemi armonici esterni, per cui S' venga in ogni caso ad appartenere ad S .

Meccanica. — *Sulle distorsioni di un cilindro elastico due volte connesso.* Nota della sig.^{na} ELEONORA FREDÀ, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Mi propongo di applicare alla determinazione degli spostamenti in un cilindro elastico due volte connesso, sottoposto ad una distorsione, il risultato seguente ottenuto dal prof. Almansi (¹).

In un solido elastico isotropo cilindrico, più volte connesso (l'asse z è parallelo alle generatrici del cilindro) si considerino gli spostamenti,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi(xy)}{\partial x} + \frac{L+2K}{4K(L+K)} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} \\ v = -\frac{1}{2K} \frac{\partial \Phi(xy)}{\partial y} - \frac{L+2K}{4K(L+K)} \frac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \\ w = 0, \end{array} \right.$$

dove $\Phi(xy)$ è tale che: $\Delta^2 \Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ regolari in tutto il solido assumono valori costanti sulle superficie laterali, φ è una funzione armonica e $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi$.

Le (I), se le corrispondenti tensioni interne fondamentali non sono tutte nulle, rappresentano spostamenti polidromi soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1°) corrispondono a forze di massa nulle;

2°) gli elementi della superficie esterna paralleli all'asse non sono sollecitati.

Suppongo ora di operare in un cilindro elastico isotropo limitato fra due cilindri circolari (non aventi lo stesso asse) un taglio lungo una generatrice, e risaldare, dopo aver fatto subire all'una faccia del taglio uno spostamento l parallelamente ad x . Mi propongo la determinazione degli spostamenti nell'ipotesi che sul corpo non agiscano forze di massa nè tensioni superficiali sulle superficie cilindriche laterali, potendo o no le basi essere sollecitate. Premetterò le seguenti osservazioni. Posso, mediante una inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad un cerchio, mutare in una corona circolare lo spazio compreso fra due circonferenze interne l'una all'altra:

$$(II) \quad (x+c)^2 + y^2 = r_1^2 \quad (x-c)^2 + y^2 = r_2^2.$$

(¹) Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.

Perchè le inverse siano concentriche basta che il centro di inversione sia in uno dei punti H e K della congiungente i centri:

$$x_H = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \sqrt{[r_1^2 - r_2^2]^2 + 8c^2[2c^2 - r_1^2 - r_2^2]}}{4c} \quad y_H = 0,$$

$$x_K = \frac{r_1^2 - r_2^2 - \sqrt{[r_1^2 - r_2^2]^2 + 8c^2[2c^2 - r_1^2 - r_2^2]}}{4c} \quad y_K = 0,$$

che separano armonicamente le coppie di punti $[A_1, B_1]$, $[A_2, B_2]$ intersezioni della congiungente con ciascuna delle circonferenze. Tali punti H e K sono certo reali perchè per ipotesi $[A_1, B_1]$, $[A_2, B_2]$ non si separano, K è interno ad entrambe le circonferenze, H è esterno ad entrambe.

Le equazioni delle circonferenze inverse delle date rispetto al cerchio di raggio unitario e centro K, che assumo come origine, sono

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x - a)^2 + y^2 = R_2^2 \end{cases}$$

se

$$(III) \quad \begin{cases} a = \frac{c - x_K}{c^2 + x_K^2 - 2cx_K - r_2^2} \\ R_1^2 = a^2 - \frac{1}{c^2 + x_K^2 + 2cx_K - r_1^2} \quad R_2^2 = a^2 - \frac{1}{c^2 + x_K^2 - 2cx_K - r_2^2} \end{cases}.$$

E quindi si vede che l'espressione:

$$J = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} + a^2 = a^2 \frac{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

[dove a, R_1, R_2 hanno i valori (III)] è costante sui due cerchi primitivi, e precisamente è eguale a R_1^2 sul primo, ad R_2^2 sul secondo.

Se i cerchi dati fossero concentrici

$$c = x_K = a = 0, \quad x_H = \infty, \quad J = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad R_1^2 = \frac{1}{r_1^2}, \quad R_2^2 = \frac{1}{r_2^2}.$$

Tornando ora al problema che voglio risolvere [prendo come asse z l'asse parallelo alle generatrici del cilindro luogo dei punti K delle sezioni normali] basta che determini una funzione biarmonica Φ tale che $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ regolari in tutto il corpo siano costanti per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$ ed una funzione armonica φ tale che $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sia regolare, mentre:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{funzione monodroma} + \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \operatorname{artg} \frac{y}{x},$$

da cui:

$$\varphi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ x \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \log[x^2 + y^2] + \psi \right\},$$

dove ψ è armonica tale che $\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ sono regolari in tutto il solido

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{A}^2 \Phi,$$

quindi

$$\Phi = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -\frac{y}{4} \log(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \chi \right\},$$

χ essendo biarmonica tale che $\frac{1}{2} \mathcal{A}^2 \chi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[-\frac{xy}{2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[-\frac{y^2}{2(x^2 + y^2)} - \frac{1}{4} \log(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right],$$

debbano ridursi costanti per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$ per questo basta che χ sia tale che:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{xy}{x^2 + y^2} + f_1(xy) (J - R_1^2) (J - R_2^2) + \lambda(J)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f_2(xy) (J - R_1^2) (J - R_2^2) + \mu(J),$$

perchè una tale funzione χ esista occorre che coincidano le due espressioni:

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} + \lambda'(J) \frac{\partial J}{\partial y} + \\ \quad + \frac{\partial f_1}{\partial y} (J - R_1^2) (J - R_2^2) + f_1 \frac{\partial J}{\partial y} (2J - R_1^2 - R_2^2) \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{[x^2 + y^2]^2} + \mu'(J) \frac{\partial J}{\partial x} + \\ \quad + \frac{\partial f_2}{\partial x} (J - R_1^2) (J - R_2^2) + f_2 \frac{\partial J}{\partial x} (2J - R_1^2 - R_2^2) . \end{array} \right.$$

Se

$$f_1 = \alpha(J) y \frac{\partial J}{\partial x}, \quad f_2 = \alpha(J) y \frac{\partial J}{\partial y}, \quad \mu'(J) = \alpha(J) (J - R_1^2) (J - R_2^2)$$

le (IV) coincidono. Ora debbo determinare $\alpha(J)$ in modo che $\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y}$ non

contengano più rispettivamente i termini $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2}$ altrimenti troverei $\chi = \frac{y}{2} \log(x^2+y^2) + \dots$ e si perderebbe in φ il termine polidromo che voglio compaia. Posso ottenere ciò prendendo:

$$\alpha(J) = -\frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{J^2}.$$

Sostituendo nelle espressioni delle derivate di χ ed integrando:

$$\chi = \frac{1}{2} y \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] - \frac{y}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left[J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right],$$

la quale è biarmonica ed ha derivate rispetto ad x e ad y regolari nell'interno del corpo perchè l'asse $x = \frac{1}{a} y = 0$ luogo di punti H è esterno al solido. Trovata χ ho facilmente ψ tenendo conto che:

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\Delta^2 \chi}{2},$$

quindi:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left[\frac{1}{4} y \log J - \frac{y}{4(R_1^2 + R_2^2)} \left[J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right] \right] \\ \varphi &= \frac{l}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ x \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \left(x - \frac{1}{a} \right) \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{2} \log J - \frac{a}{R_1^2 + R_2^2} \operatorname{artg} \frac{y}{x} - \frac{R_1^2 R_2^2}{a^3(R_1^2 + R_2^2)} \operatorname{artg} \frac{y}{x - \frac{1}{a}} \right\}. \end{aligned}$$

Determinate Φ e φ dalle (I) ho gli spostamenti cercati.

Suppongo ora invece che eseguito un taglio nel piano xz si sposti una faccia di esso parallelamente all'asse y di m . Per determinare gli spostamenti debbo, analogamente al caso precedente, determinare due funzioni Φ e φ che soddisfino alle condizioni imposte dal prof. Almansi, e di più $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sia regolare, mentre:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \text{funzione monodroma} - \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \operatorname{artg} \frac{y}{x},$$

da cui:

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ -y \operatorname{artg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} x \log(x^2 + y^2) + \psi \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{A}^2 \Phi$$

$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \left\{ \frac{x}{4} \log(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \chi \right\}.$$

Allo scopo di rendere $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ costanti per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$ cerco di determinare χ in modo che:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + f_1(xy) (J - R_1^2) (J - R_2^2) + \lambda(J);$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{xy}{x^2 + y^2} + f_2(xy) (J - R_1^2) (J - R_2^2) + \mu(J),$$

ed una tale funzione χ esiste se coincidono le due espressioni $\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial x}$. L'esame della forma di tali derivate seconde e l'opportunità di far sparire dalle derivate prime di χ certi termini, suggerisce la scelta:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2) J^2} \frac{x}{\partial x} \frac{\partial J}{\partial x}, \quad f_2(xy) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2) J^2} \frac{x}{\partial y} \frac{\partial J}{\partial y},$$

$$\lambda(J) = \frac{1}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ 1 - \frac{R_1^2 + R_2^2}{J} + \frac{R_1^2 R_2^2}{J^2} \right\}.$$

Sostituiti i quali valori, si ha con una integrazione:

$$(V) \quad \chi = -\frac{x}{2} \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \frac{x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right\}.$$

Ma tale funzione χ non è biarmonica per la comparsa del termine:

$$-\frac{R_1^2 R_2^2}{2a^4(R_1^2 + R_2^2)} \frac{x}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2}.$$

Cercherò di renderla tale mediante l'aggiunta di alcuni termini la cui somma soddisfi ancora alla proprietà di avere derivate rispetto ad x ed y costanti per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$. Aggiungo intanto a χ la funzione

$$-\frac{3}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ J - (R_1^2 + R_2^2) \log J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right\}$$

che gode di questa proprietà. Allora:

$$\chi = -\frac{x}{2} \log a^2 \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] + \frac{(1-s)x}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right\} + \\ + \frac{s \left(x - \frac{1}{a} \right)}{2(R_1^2 + R_2^2)} \left\{ J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J} \right\} + \frac{s}{2a} \log J,$$

la quale non è biarmonica per la comparsa dei termini:

$$-\frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{(1-s) R_1^2 R_2^2}{2a^4(R_1^2 + R_2^2)} \frac{x}{\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2}.$$

Posso eliminare tale inconveniente aggiungendo la funzione:

$$(VI) \quad \mu = (x^2 + y^2) \left[c_1 + \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} J^2 \right] + \\ + \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 \right] \left[b_1 + \frac{(1-s) R_1^2 R_2^2 a^3}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{J^2} \right].$$

Ora debbo determinare s, b_1, c_1 in modo che $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}$ siano costanti per $J = R_1^2, J = R_2^2$.

Mineralogia. — *Notizie cristallografiche sulla piemontite di St. Marcel* (Valle d'Aosta) ⁽¹⁾. Nota di F. BALZAC, presentata dal Socio E. ARTINI.

La piemontite rappresenta, com'è noto, un minerale assai interessante, perchè è uno dei pochissimi silicati nei quali esiste il manganese trivalente come sostituyente del ferro e dell'alluminio, pure trivalenti. Data la scarshezza dei dati cristallografici esistenti intorno ai composti del manganese trivalente, può dirsi che nulla si conosce di preciso intorno all'effetto morfotropico determinato dalla sostituzione, in un composto, del manganese al ferro ferrico ed all'alluminio. Sotto questo punto di vista, la piemontite merita una particolare attenzione, perchè, data la quantità considerevole di Mn_2O_3 in essa contenuta, sembrerebbe dovesse essere possibile, confrontando le costanti cristallografiche di questo minerale con quelle dell'epidoto, di determinare quali variazioni, nel rapporto assiale dell'epidoto, vengono causate dall'entrata di Mn_2O_3 al posto di una parte di Al_2O_3 e di Fe_2O_3 .

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

Disgraziatamente, i cristalli di piemontite di St. Marcel in Val d'Aosta, che costituiscono uno dei pochissimi giacimenti nei quali questo minerale è stato, finora, rinvenuto in cristallini macroscopici, non permettono, di solito, misure esatte in numero sufficiente, causa la striatura delle faccie della zona [010], che, come generalmente accade nell'epidoto, è quella secondo la quale i cristallini sono allungati, e la mancanza pressochè costante di facce terminali piane e regolari.

Dato questo stato di cose, non può meravigliare se le poche ricerche cristallografiche finora eseguite sulla piemontite di St. Marcel hanno condotto a risultati solamente approssimativi — e, per giunta, incerti — intorno alle costanti cristallografiche del minerale. Anche le forme semplici finora osservate sono assai poche: il che è tanto più notevole, se si pensa alla grande ricchezza di forme presentate dall'epidoto.

Il primo che abbia eseguito delle ricerche di un certo interesse sulla piemontite di St. Marcel è stato il Des Cloizeaux ⁽¹⁾, il quale osservò nei suoi cristalli le seguenti forme:

$$M\{001\} \quad T\{100\} \quad i\{\bar{1}02\} \quad n\{\bar{1}11\}.$$

e constatò che gli angoli da lui misurati (solo approssimativamente, del resto) erano assai prossimi ai valori trovati nell'epidoto.

Molti anni dopo, il Laspeyres ⁽²⁾ aggiunse, alle forme trovate dal Des Cloizeaux, le due seguenti:

$$P\{010\} \quad \text{ed} \quad e\{101\}.$$

In base alle sue misure, egli calcolò le costanti

$$a : b : c = 1.6100 : 1 : 1.8326 \quad \beta = 115^{\circ} 21'$$

le quali differiscono notevolmente da quelle dedotte dal Kokscharow per l'epidoto. Questo è in contraddizione coll'opinione esposta dal Laspeyres, che l'entrata del manganese nell'epidoto debba portare minime variazioni di valori angolari, e, conseguentemente, di costanti; d'altra parte, i valori calcolati dal Laspeyres non hanno un forte grado di attendibilità, perchè determinati in base a tre misure, delle quali una fu eseguita al microscopio, e due al goniometro su immagini molto pallide e diffuse.

Il Laspeyres, però, calcolò pure altre costanti in base a quattro valori angolari che il Des Cloizeaux diede come medie di sue misure, e, precisamente:

$$\begin{array}{ll} a : b : c = 1.5484 : 1 : 1.7708 & \beta = 115^{\circ} 20' \\ a : b : c = 1.5751 : 1 : 1.7904 & \beta = 115^{\circ} 20' \\ a : b : c = 1.5384 : 1 : 1.7584 & \beta = 115^{\circ} 33'. \end{array}$$

⁽¹⁾ Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, 1862, 1, 254.

⁽²⁾ Laspeyres, *Die kristallographischen und optischen Eigenschaften des Manganepepidot*, Zeit. für Krist. 1880, 4, 435,

Da queste costanti si dedurrebbero, come media, le seguenti:

$$a : b : c = 1.5539 : 1 : 1.7732 \quad \beta = 115^{\circ} 24'$$

Il Laspeyres ritiene, però, di dover preferire le prime, poichè esse vennero calcolate mediante valori angolari più prossimi ai corrispondenti dati per l'epidoto.

Il prof. Zambonini, in cristalli di *habitus* simili a quelli studiati dal Des Cloizeaux, e provenienti dallo stesso giacimento, osservò le nuove forme $\{102\}$, $\{\bar{1}07\}$ e $\{\bar{2}01\}$, tutte già note nell'epidoto (¹).

Complessivamente, dunque, le forme finora osservate nella piemontite sono le seguenti:

$$M\{001\} \quad T\{100\} \quad p\{010\} \quad e\{101\} \quad m\{102\} \quad i\{\bar{1}02\} \quad \{\bar{1}07\} \quad l\{\bar{2}01\} \quad n\{\bar{1}11\}.$$

Lo Zambonini notò che i valori angolari più esatti da lui misurati erano più prossimi ai corrispondenti per l'epidoto che non a quelli calcolati mediante le costanti di Laspeyres; e ritenne, perciò, che tali costanti, che alquanto differiscono da quelle del Kokscharow, non debbano essere troppo attendibili.

Siccome alcuni anni fa, grazie alla cortesia del maggiore prof. A. Peloux, il prof. Zambonini venne in possesso di cristallini di piemontite di St. Marcel ben conformati, alcuni dei quali presentanti nitide faccettine terminali, egli mi consigliò di sottometterli ad un accurato esame goniometrico, allo scopo sia di rinvenire eventualmente delle altre forme, oltre quelle già note, sia, soprattutto, di riunire un numero sufficiente di misure attendibili, per calcolare le costanti della clinozoisite e dell'epidoto, al fine di riconoscere l'azione morfotropica esercitata dalla sostituzione del manganese al ferro ed alluminio.

I cristalli, che io dunque studiai, si presentano colorati in rosso-bruno, con faccie per lo più esili, striate e poco splendenti. Sono fragilissimi, e raramente hanno faccie terminali. Essi corrispondono al tipo di quelli studiati dal Laspeyres: sono, cioè, costantemente tabulari secondo $\{100\}$ ed allungati nella direzione dell'asse y , nella quale raggiungono fino 3 mm. Des Cloizeaux e Zambonini hanno, invece, osservato cristalli nei quali dominano, nella zona $[010]$, $\{001\}$ e $\{\bar{1}02\}$.

Le forme che complessivamente ho notate sono le seguenti:

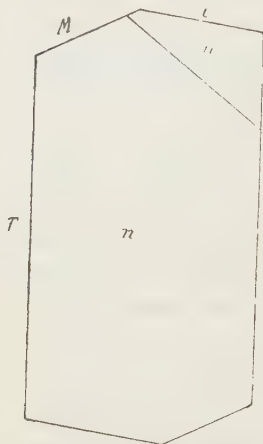
$$\begin{array}{ccccccc} M\{001\} & T\{100\} & l\{\bar{2}01\} & \{\bar{5}.0.11\} & \{\bar{6}.0.11\} & i\{\bar{1}02\} & \{\bar{8}.0.25\} \\ & \{\bar{2}07\} & \{\bar{2}09\} & \{\bar{1}08\} & \{\bar{1}.0.12\} & \{\bar{1}07\} & n\{\bar{1}11\}, \end{array}$$

delle quali $\{\bar{1}07\}$ $\{\bar{5}.0.11\}$ $\{\bar{6}.0.11\}$ $\{\bar{8}.0.25\}$ $\{\bar{2}07\}$ $\{\bar{2}09\}$ $\{\bar{1}08\}$ $\{\bar{1}.0.12\}$ sono nuove per la piemontite.

(¹) Zambonini, *Kristallographisches über den Epidot*, Zeit. für Kryst. 1902, pag. 37.

Predominano le faccie di $\{100\}$; esili sono quelle di $\{001\}$, e pure del tutto subordinati sono gli altri pinacoidi della zona $[010]$. Tutti presentano striature parallele alla direzione d'allungamento; mentre assai splendente è la $\{100\}$, molto meno lo sono le altre, per cui belle sono le immagini date dalla prima, pallide e diffuse quelle fornite dalle seconde.

Mentre la $\{100\}$ e la $\{001\}$ sono presenti in tutti i cristalli, più rara è la forma $\{\bar{1}02\}$ e più ancora $\{\bar{2}01\}$. Ho potuto notare la $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ in due soli individui terminati ad un solo estremo dell'asse b : in ambedue la $(\bar{1}\bar{1}1)$



è assai estesa e ha dato buona immagine; mentre l'altra faccia $(\bar{1}\bar{1}1)$ è ridotta ad un punto, nè è misurabile con esattezza. L'*habitus* di questi cristalli è rappresentato dalla figura 1. Relativamente alle forme nuove, noterò che, per quanto pallide siano le immagini date dalle rispettive faccie, le loro misure sono assai attendibili, perchè concordanti in diversi individui. È anche da notare che tutte le nuove forme, ad eccezione di $\{\bar{2}09\}$ e di $\{\bar{2}07\}$, sono già conosciute nell'epidoto.

Nella seguente tabella sono riuniti gli angoli misurati, mediante i quali si è calcolato il simbolo delle nuove forme, comparati a quelli calcolati in base alle mie costanti della piemontite ed ai valori che si deducono dalle costanti proposte dal Kokscharow per l'epidoto:

Angoli	Misurati	Calcolati	
		Piemontite (in base alle mie costanti)	Epidoto (in base alle cost. di Kokscharow)
$001 \wedge \bar{1}.0.12$	$4^{\circ} 53'$	$5^{\circ} 6' 16''$	$5^{\circ} 7'$
$001 \wedge \bar{1}.0.8$	$8 \ 18$	$7 \ 48 \ 1$	$7 \ 59$
$001 \wedge \bar{8}.0.25$	$21 \ 19$	$21 \ 20 \ 20$	$21 \ 19$
$001 \wedge \bar{5}.0.11$	$30 \ 57$	$31 \ 2 \ 15$	$31 \ 7$
$001 \wedge \bar{6}.0.11$	$37 \ 15$	$37 \ 26 \ 42$	$37 \ 32$
$001 \wedge 1.0.7$	$7 \ 27$	$7 \ 49 \ 47$	$7 \ 51$
$001 \wedge \bar{2}09$	$14 \ 24$	$14 \ 22 \ 32$	—
$001 \wedge \bar{2}07$	$18 \ 53$	$18 \ 52 \ 55$	—

Delle due nuove forme non ancora osservate nell'epidoto, la $\{\bar{2}09\}$ è compresa tra la $\{\bar{3}.0.16\}$ di Bücking e la $\{\bar{6}.0.25\}$ di Flink, mentre $\{\bar{2}07\}$ si trova tra la $\{\bar{1}04\}$ di Haüy e la $\{\bar{8}.0.25\}$ di Flink.

In qualche cristallo ho trovato la $\{\bar{1}02\}$, che forma colla $\{001\}$ un angolo di $34^{\circ}16'$, sostituita da una vicinale esilissima, inclinata sulla base di $32^{\circ}28'$ (media di 3 misure ben concordanti). Il simbolo corrispondente a questa forma sarebbe $\{\bar{1}9.0.40\}$, evidentemente complicatissimo, per il quale si calcola $32^{\circ}29'50''$.

Io ho potuto misurare abbastanza esattamente alcuni angoli; e, in base ai tre valori che seguono, i quali rappresentano le medie di più misure concordanti,

001 \wedge 100	64° 39'	(64° 36' nell'epidoto)
$\bar{1}00 \wedge \bar{1}11$	68° 53'	(69° 4' ")
001 \wedge $\bar{1}11$	74° 59'	(75° 12' "),

ho calcolato per la piemontite le costanti

$$a : b : c = 1.55929 : 1 : 1.77753 \quad \beta = 115^{\circ}21'.$$

Queste costanti sono, certamente, più esatte di quelle del Laspeyres, fondate su misure riconosciute poco esatte dallo stesso autore; e meritano, perciò, di essere preferite, almeno fino a quando non si troveranno numerosi e meglio conformati cristalli, come costanti cristallografiche della piemontite.

Nello specchietto che segue, ho posto a confronto tali costanti con quelle dell'epidoto e della clinozoisite:

Piemontite (Laspeyres) . .	1.6100 : 1 : 1.8326	$\beta = 115^{\circ}21'$
Clinozoisite.	1.5853 : 1 : 1.8117	$\beta = 115^{\circ}29'56''$
Epidoto	1.5807 : 1 : 1.8057	$\beta = 115^{\circ}24'$
Piemontite (Balzac) . . .	1,5593 : 1 : 1.7775	$\beta = 115^{\circ}21'$

Mentre con le costanti di Laspeyres sembrava che la sostituzione del manganese al ferro ed all'alluminio si esplicasse in un ingrandimento dei due rapporti $a:b$ e $b:c$, le mie misure, più precise, mostrano che si verifica effettivamente proprio il contrario, e che l'influenza della sostituzione anzidetta sulle costanti cristallografiche si manifesta con una diminuzione dei due rapporti $a:b$ e $b:c$, oltre ad una lieve diminuzione dell'angolo β .

È notevole il fatto che, passando dalla clinozoisite all'epidoto ed alla piemontite, si ha una regolare diminuzione, sia dei due rapporti $a:b$ e $b:c$, sia dell'angolo β .

Nella seguente tabella sono riportati i valori che si calcolano, in base alle mie costanti, per alcuni degli angoli più importanti della piemontite:

$$\begin{array}{l}
 (001):(102) = 22^{\circ} 29' 31'' \\
 (001):(\bar{1}07) = 8 \ 59 \ 22 \\
 (001):(\bar{2}01) = 89 \ 20 \ 9 \\
 (001):(\bar{1}02) = 34 \ 16 \ 7 \\
 (001):(\bar{1}11) = 74 \ 59 \\
 (\bar{1}00):(\bar{1}11) = 68 \ 53 \\
 (010):(\bar{1}11) = 35 \ 36 \ 30 \\
 (\bar{1}11):(\bar{1}\bar{1}1) = 71 \ 13 \\
 (\bar{1}11):(\bar{1}02) = 59 \ 29 \ 17 \ (1).
 \end{array}$$

Al prof. F. Zambonini rinnovo i miei sentiti ringraziamenti per i consigli e gli insegnamenti che costantemente mi prodigò nel corso del presente studio.

Fisiologia. — *I processi termici dei centri nervosi. II. Produzione di calore del preparato centrale di « Bufo » in condizioni normali* (2). Nota di S. BAGLIONI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

1. *Raffreddamento iniziale.* Il primo fatto costante che osservavo seguire immediatamente all'adagiamento dei centri, con la faccia ventrale o dorsale, sulla batteria termoelettrica, era una rapidissima e forte deviazione galvanometrica negativa, al di sotto dello zero, che, data la costante disposizione del circuito, indicava rapido e forte raffreddamento della serie degli elementi a contatto con la sostanza nervosa. Messo il coperchio, provvisto di carta da filtro imbevuta di acqua, il galvanometro risaliva, quindi, con mediocre velocità, per giungere, dopo alcuni minuti, al valore primitivo e superarlo, come vedremo.

Della causa e del significato del raffreddamento iniziale dirò che esso era un fenomeno puramente fisico, dovuto al raffreddamento del preparato per evaporazione acquee, come mi pare dimostrato dai seguenti fatti:

a) i rospi, da cui traevo il preparato, vivevano nella camera delle esperienze almeno da ventiquattro ore prima dell'isolamento dei centri. Avevano, così, il tempo necessario per assumere la temperatura dell'ambiente, come potei verificare leggendo, prima dell'operazione, la temperatura dell'interno del loro corpo, su un termometro graduato al decimo di grado, il cui bulbo introducevo, per l'esofago, nello stomaco;

b) ogni volta in cui, durante l'esperimento, scoprivo il preparato, togliendo il coperchio dell'apparecchio, seguiva sempre graduale e rela-

(1) Come media di tre diverse misure, io per questo angolo ho trovato $59^{\circ} 27'$.

(2) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Sassari.

tivamente rapida deviazione galvanometrica negativa, la cui entità era direttamente proporzionale alla durata dello scoprimento. Appena richiuso, o poco dopo, la deviazione negativa si arrestava e, poi, si invertiva;

c) la stessa deviazione negativa, ma più immediata e più rapida, seguiva tutte le volte che, nell'interno della camera umida, provocavo una corrente gazzosa, insuflando aria, ossigeno o anidride carbonica, attraverso una sottile cannula di vetro fissata, mediante cotone bagnato, nella scanalatura della cassettona esterna (A), al di sopra dei nervi sciatici. Appena interrotta la corrente o poco dopo, la deviazione negativa parimenti cessava per convertirsi in senso opposto;

d) identici fatti ho osservato sul preparato centrale divenuto ineccezionale, su muscoli isolati e su strisce di sostanza muscolare di rospo e, finalmente, su batuffolini di cotone imbevuti di soluzione al 0.7 % di NaCl, delle dimensioni e della forma del preparato centrale, posti sulla batteria termoelettrica.

2. *Influenza delle variazioni della temperatura esterna.* Siccome le osservazioni dell'ulteriore decorso si estendevano, quasi sempre, dalle ore otto alle sedici o diciotto, per intendere il significato dei dati è necessario premettere il risultato di esperienze di controllo fatte dopo aver posto nell'apparecchio un batuffolino di cotone idrofilo, imbevuto di soluzione al 0.7 % di NaCl, simile al preparato centrale, seguendo al galvanometro il valore termico nelle diverse ore del giorno, in cui variava la temperatura ambiente, che leggevo direttamente su un termometro graduato al decimo, appeso nell'aria in vicinanza della campana di vetro racchiudente l'apparecchio.

Esperienza IX, 5 marzo 1916. Ore 8. — Adagio un batuffolino di ovatta, imbevuto di soluzione fisiologica, sulla batteria di otto coppie di elementi; il galvanometro scende rapidamente da 840 a 300. Chiudo col coperchio, avente carta imbevuta di H_2O : anche la scanalatura posteriore chiudo con ovatta asciutta. Il galvanometro va lentamente risalendo. Nella seguente tabella sono i dati successivi:

TABELLA I.

h. min.'	Galvanom.	Temper. ambiente
8.9	720	—
8.17	750	13°.0
8.34	760	—
8.50	778	—
9.1	775	13.1
10.10	820	—
11.13	910	13.9
12.15	922	14.5
13.7	950	14.4
13.44	990	15.0
13.57	1010	15.4
14.48	1010	—
15.30	940	15.2
16.19	890	15.2
16.55	890	15.1

Esperienza XXVI (ultima parte), 21 marzo 1916. — Batteria di 5 coppie. Ore 12.3'. Dopo un'esperienza con preparato centrale, lo sostituisco con batuffolo d'ovatta umida. Il galvanometro, il cui O corrispondeva a 600 della scala, scende rapidamente sotto O della scala: chiuso il coperchio, risale lentamente. La tab. II indica i dati successivi:

TABELLA II.

h. min.' min."	Galvanom.	Temper. ambiente
12.12	400	16° 4
" 13	500	—
" 14.30	570	—
" 15	600	—
" 17	650	—
" 23.30	685	—
" 26	695	—
" 33	700	16° 5
13.9	710	16° 55

Fo passare, per 1 min.', corrente di O,
Il galvanom. scende fortem. sotto O.

13.12	160	—
" 14	340	—
" 35	700	—
" 46	690	16° 7
14.41	680	16° 6
15.22	750	17° 0

Le due tabelle mostrano che le due batterie risentivano l'influenza delle variazioni di temperatura dell'ambiente (di 2.° 4 e di 0.° 6), nello stesso senso di esse. La serie degli elementi superiori (su cui era adagiato il cotone) si riscaldava o si raffreddava, secondo la temperatura esterna, alquanto prima della serie inferiore. Queste deviazioni, dovute all'influenza della temperatura esteriore, sono caratterizzate dal fatto di essere lentissime e congruenti coi valori della temper. esterna. Non sono, però, esattamente corrispondenti a questi ultimi, pel principio delle pile termoelettriche di indicare solo la differenza relativa di temperatura delle coppie opposte e non la quantità assoluta del calore.

3. *Tonalità termica del preparato centrale in condizioni normali.*
Riferisco i dati di due esperienze:

Esperienza VI, 2 marzo 1916, Ore 10.30'. — Preparato normale; O del galvanometro, 760. Alle ore 11, adagio la faccia dorsale dei centri sulla serie superiore della batteria di 8 coppie. Nella tab. III ho raccolto i dati successivi delle prime tre ore.

TABELLA III.

h. min'. min."	Galvanom.	Attività centrale	Temper. esterna	Osservazioni
11.4	550	Energici moti riflessi a stimoli meccanici della cute.	15°.1	
" 6	595			
" 12	645			
" 15	670			
" 17	680			
" 21	695			
" 23	700			
" 34	745			
12.3	945			
" 4	950			
" 5	960	Forti riflessi a stimolo meccanico cutaneo.	15°.4	Interrompendo il circuito esterno, scende a 850: ristabilito, sale a 940.
" 5.5	950			
" 7				
" 17	865			
" 18	860			
" 20	840			
" 22	820			
" 26	785			
" 34	860			
13.1	1040			
" 3	1040	Torpidi riflessi.	16°.1	Aprendo il circuito esterno, scende a 840.
" 3.30	1045			
" 5	1050			
" 6	880			
" 17	935			
" 24	922			
" 37	985			
" 40	920			
" 42	915			
" 44	970			
" 44.30	965	Idem.	16°.5	
" 45	960			
" 46	950			
" 48	930			
" 54	850			

Esperienza VII, 3 marzo 1916. — Preparato normale di Bufo ♂. O della batteria di 8 coppie, vuota, 1000. Alle ore 10.18' adagio il preparato sulla faccia ventrale; il galvanometro scende al di sotto di 700. La tab. IV indica i dati successivi:

TABELLA IV.

h. min.′	Galvanom.	Attività centrale	Temper. esterna	Osservazioni
10.20	925	Energici moti riflessi.	14°.7	
" 24	975			
" 27	1005			
" 35	1025			
" 46	1050			
" 55	1105			
" 56	1130			
" 57	1140			
" 59	1130			
11.14	1160			
" 37	1160	Non reagisce più.	15°.2	
" 47	1100			
" 57	1070			
" 59	1065			
12.20	1150			
" 29	1180			

I dati delle tabelle III e IV, come quelli di altre esperienze che, per brevità, ometto di specificare, concordemente dimostrano che alla deviazione negativa iniziale (dovuta, come ho detto in principio, a raffreddamento per evaporazione) segue una lenta e graduale marcia positiva, la quale porta il galvanometro a un valore massimo superiore allo zero, ossia di 110 divisioni della scala (assumendo lo zero del galvanometro = 850) nell'esp. VI, dopo 65 min'; di 160 divisioni nell'esp. VII, dopo 56'. Questa deviazione positiva, che indica riscaldamento della serie superiore (di 0°.055, nell'esp. VI; e di 0°.080, nella VII). è, in gran parte, certamente dovuta a produzione di calore del preparato centrale. È indipendente dall'aumento della temperatura esterna, perchè, nel frattempo, lievissimo fu tale aumento; ma, soprattutto, perchè alla fase di aumento seguì una seconda fase di evidente ritorno verso lo zero.

Considerando attentamente i dati, che dimostrano l'aumento di temperatura dovuto ai processi propri del preparato, si scorge che tale sviluppo di temperatura deve essere l'effetto di due distinti fattori biologici: a) del cosiddetto *metabolismo di riposo*, che ha luogo nei centri sopravvivenenti, senza manifestazione esterna di attività riflessa: b) del *metabolismo di attività*, che si svolge durante l'attività riflessa. A causa del primo fattore, il galvanometro sale lentamente; mentre, quando insorgono movimenti riflessi energici, la deviazione galvanometrica è, relativamente, più rapida. Nell'esperienza VI, dopo 2' dalla provocazione di riflessi energici il galvanometro era salito di 15 divisioni (= + 0°.0075); nell'esp. VII, parimenti dopo 2' dalla manifestazione dei riflessi, era salito di 35 divisioni (= + 0°.0175). Per quanto rapida tale deviazione positiva, dovuta all'attività riflessa, essa non

coincide tuttavia con la manifestazione dei movimenti, ma li segue con un notevole ritardo (di 1'-2'); ciò, molto probabilmente, è dovuto al fatto che il processo esotermico, avente luogo nella sostanza grigia del midollo spinale, impiega un certo tempo per diffondersi alla batteria, attraverso la sostanza bianca. Altro fatto notevole è che alla fase di deviazione positiva segue costantemente una rapida fase negativa, per cui, dopo 3' dai riflessi, il galvanometro è di nuovo disceso. Questo fatto, se non è dovuto, per intero, alla rapida equilibratura termica della batteria esploratrice, potrebbe forse indicare che, mentre i processi catabolici dell'attività sono accompagnati da sviluppo di calore, quelli anabolici della restaurazione successiva abbiano per effetto assorbimento di calore. Ma su questa ipotesi e su altre concernenti i processi intimi del preparato centrale, che condizionano la sua tonalità termica, tornerò in seguito, dopo aver riferito i dati di altre esperienze.

Rimanendo al commento dei successivi dati delle tabelle III e IV, rilevo che, dopo due ore circa dalla preparazione, quando l'attività riflessa era diminuita o scomparsa (poiché i centri erano in un ambiente povero di O_2), ha luogo un ulteriore elevamento termico che però mi sembra prevalentemente dovuto all'aumento della temperatura esterna. Nell'esp. VI, in cui si manifestava ancora attività riflessa (sebbene torpida), è tuttavia evidente l'aumento termico dovuto agli atti riflessi, che, come prima, dopo 2', è di 10 divisioni ($= + 0.005$).

Se per *tonalità* o *tono termico* intendiamo il valore termico complessivo risultante dall'insieme dei processi (eso- ed entotermici) prodotti dai processi metabolici del preparato centrale sopravvivate, mi pare di poter concludere, dai suesposti risultati sperimentali, che il *tono termico dovuto al metabolismo di riposo*, ossia del preparato centrale senza manifestazione esterna di attività, ma con la capacità di farlo, cioè ancora dotato di *eccitabilità normale*, è *lievemente e costantemente positivo*. Se si provocano *atti riflessi*, avviene in una prima fase un rapido aumento della produzione termica, che però si manifesta con un certo ritardo (di 1-2'), dovuto probabilmente al tempo necessario perché il calore, prodotto in seno della sostanza grigia, si diffonda attraverso alla sostanza bianca. Segue, quindi, come seconda fase immediata, un ritorno al valore termico precedente.

Tanto il metabolismo di riposo, quanto, in misura maggiore, il metabolismo di attività del preparato centrale di rospo, sono pertanto accompagnati da variazione termica positiva.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sulla composizione chimica della mucosa intestinale* ⁽¹⁾. Nota II di G. QUAGLIARIELLO e A. CRAIFALEANU, presentata dal Corrisp. FIL. BOTTAZZI.

Nella Nota precedente ⁽²⁾ si è visto come, delle sostanze proteiche contenute nell'estratto acquoso della mucosa intestinale, la più abbondante fosse una sostanza che per i suoi caratteri fisici e chimici generali sembrava essere una nucleoproteina.

Nella presente Nota riportiamo i risultati dell'analisi chimica di questa nucleoproteina.

Innanzitutto ci siamo preoccupati di ottenerla allo stato di massima purezza possibile. A questo scopo, il precipitato ottenuto dal liquido di estrazione, acidificato con acido acetico diluito, veniva raccolto sopra un filtro, poi pestato in un mortaio dove era disciolto nella minima quantità possibile di soluzione di carbonato sodico, e quindi diluito con acqua distillata.

La soluzione così ottenuta veniva filtrata, e nel filtrato la nucleoproteina era di nuovo precipitata con acido acetico diluito. Quest'operazione veniva ripetuta cinque volte. L'ultima volta il precipitato era abbondantemente lavato sul filtro, prima con acqua acidulata, poi con acqua distillata.

Il precipitato veniva infine lavato con alcool ed etere, e poi, asciugato entro un essiccatore su acido solforico, veniva ridotto allo stato di polvere finissima.

Sul materiale, ricavato dai quattro intestini di maiale nel modo descritto nella Nota precedente, abbiamo fatto le nostre ricerche.

Caratteri fisici. — La polvere ottenuta nel modo innanzi descritto ha un colorito grigiastro tendente al verde. Essa è assolutamente insolubile in acqua distillata, in alcool ed etere; è solubile in alcali diluiti, dai quali viene precipitata mediante acidi.

COMPOSIZIONE CHIMICA.

a) *Azoto.* — Per la determinazione dell'azoto un campione di polvere fu essiccato a 110° C fino a peso costante, e poi ossidato con acido solforico secondo Kjeldahl.

L'ammoniaca veniva distillata e raccolta in una soluzione di acido cloridrico $n/10$.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Rend. d. r. Accad. d. Lincei (5), 7^o, pag. 516 (1916).

1° Esperimento (ved. Nota precedente). — Si ossidano gr. 0,1720 di sostanza.

16,85 cm³ acido cloridrico n_{10} sono stati fissati dall'ammoniaca.

Contenuto in N % = gr. 13,71.

2° Esperimento (ved. Nota precedente). — Si ossidano gr. 0,2042 di sostanza.

20,76 cm³ acido cloridrico n_{10} sono stati fissati dall'ammoniaca.

Contenuto in N % = gr. 14,23.

3° Esperimento (ved. Nota precedente). — Si ossidano gr. 0,2056 di sostanza.

21,58 cm³ acido cloridrico n_{10} sono stati fissati dall'ammoniaca.

Contenuto in N % = gr. 14,69.

4° Esperimento (ved. Nota precedente). — Si ossidano gr. 0,2082 di sostanza.

20,57 cm³ acido cloridrico n_{10} sono stati fissati dall'ammoniaca.

Contenuto in N % = gr. 13,83.

Questi risultati possono essere così riassunti:

Azoto contenuto in 100 gr. di nucleoproteina secca:

1° esperimento:	gr.	13,71
2°	"	" 14,23
3°	"	" 14,69
4°	"	" 13,83
media: N % = gr.		14,1

b) Fosforo. — Il fosforo fu determinato col metodo di Neumann⁽¹⁾.

I dati analitici ottenuti sono i seguenti:

1° Esperimento. — Si bruciano gr. 0,3174 di sostanza.

6,9 cm³ n_{15} NaOH sono occorsi per sciogliere il fosfomolibdato d'ammonio precipitato.

Contenuto in P % = gr. 0,48.

2° Esperimento. — Si bruciano gr. 0,5172 di sostanza.

11,35 cm³ n_{15} NaOH sono occorsi per sciogliere il fosfomolibdato di ammonio precipitato.

Contenuto in P % = gr. 0,48.

3° Esperimento. — Si bruciano gr. 0,6654 di sostanza.

9,5 cm³ n_{15} NaOH sono occorsi per sciogliere il fosfomolibdato di ammonio precipitato.

Contenuto in P % = gr. 0,31.

(¹) A. Neumann, Zeitschr. f. physiol. chem., pag. 129 (1902).

4° Esperimento. — Si bruciano gr. 0,8524 di sostanza.

14 cm³ $n/5$ NaOH sono occorsi per sciogliere il precipitato di fosfomolibdato di ammonio.

Contenuto in P % = gr. 0,36.

I risultati si possono così riassumere:

Fosforo contenuto in 100 gr. di nucleoproteina secca:

1° esperimento:	gr.	0,48
2° "	"	0,48
3° "	"	0,31
4° "	"	0,36
media: P % = gr.		0,40

c) *Zolfo*. — Per la determinazione dello zolfo la sostanza fu bruciata col miscuglio di carbonato sodico e nitrato potassico.

Lo zolfo fu determinato solo nella nucleoproteina raccolta nel 3° esperimento (ved. Nota precedente).

Si ossidano gr. 1,6283 di sostanza.

Sono stati ottenuti gr. 0,0896 di solfato di bario, che corrispondono a gr. 0,0123 di zolfo.

Contenuto in S % = gr. 0,75.

d) *Ferro*. — La polvere di nucleoproteina ha sempre dato nettissime le reazioni del ferro. Una determinazione quantitativa non è stata fatta ancora.

e) *Basi puriniche*. — Mediante la precipitazione con nitrato di argento ammoniacale, ci è riuscito di dimostrare con assoluta certezza la presenza di basi puriniche nella nucleoproteina intestinale.

f) *Idrato di carbonio*. — La nucleoproteina dà nettissima la reazione dei pentosii con acido cloridrico e floroglucina.

Si può quindi affermare che in essa è contenuto un idrato di carbonio, e precisamente un pentosio.

CONCLUSIONE.

Dalle ricerche innanzi riferite risulta, che nella mucosa intestinale esiste una nucleoproteina contenente anche ferro nella sua molecola.

L'analisi elementare dirà le quantità di carbonio ed idrogeno in essa contenute. Per ora ci è soltanto possibile il dire che la nucleoproteina contiene in media: 15 % di azoto; 0,40 % di fosforo; 0,75 % di zolfo.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo: le reazioni biologiche nelle tripanosomiasi umane ed animali nella identificazione dei « virus »* ⁽¹⁾. Nota III del prof. dott. ALESSANDRO LANFRANCHI, presentata dal Socio sen. B. GRASSI.

Ho già resi noti, in precedenti pubblicazioni ⁽²⁾, i poteri agglutinante e tripanolitico del mio siero.

Seguendo sempre il medesimo indirizzo di tecnica anche per le ricerche in merito al potere protettore, ho avuto cura che il mio siero e quelli che mi hanno servito per le esperienze di controllo rimanessero per 10-12 giorni alla ghiacciaia, allo scopo di eliminare con l'invecchiamento l'azione delle immunisine naturali capaci di un certo potere protettore di fronte al *virus gambiense* G. Y., azione alla quale ho già accennato ⁽³⁾.

A differenza però di quanto feci nella prima serie di ricerche, non ho adoperato il siero alla dose di 1 cc. mescolato a $\frac{2}{10}$ di cc. di una diluizione di sangue di ratto contenente 10-12 tripanosomi per campo microscopico ad un ingrandimento di 350 diametri; ma ho voluto, per quanto mi fosse possibile, ricercare la dose protettrice limite del mio siero di fronte ai tre *virus* (*Lanfranchii*, *Evansi*, *gambiense*).

A tale scopo fermo restando il quantitativo di *virus* ($\frac{2}{10}$ di cc.), ho variato la quantità del siero. Questo è stato adoperato alle dosi di 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ di cc.

I controlli furono di due specie: gli uni ricevettero la stessa dose di *virus* in 1 cm³ di soluzione fisiologica; gli altri, invece, la stessa dose associata ad 1 cc. di siero proveniente da individui non affetti da tripanosomiasi e negativo alla Wassermann.

La durata del contatto dei tre *virus*, col mio siero, con quello normale, e col fisiologico, fu costantemente di tre minuti; dopo di che le diverse miscele venivano inoculate nel peritoneo di topini bianchi.

Riporto nel quadro sottostante i risultati ottenuti in tale ordine di ricerche, citando solo i soggetti che hanno presentato i periodi estremi per il decorso della infezione.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia e clinica medica veterinaria nella R. Università di Bologna.

⁽²⁾ A. Lanfranchi, *Ulteriori ricerche sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo*. Nota I e II, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche matematiche e naturali, 1916, sedute del 6 e 19 febbraio.

⁽³⁾ A. Lanfranchi, *Sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo*. Bull. delle scienze mediche, Bologna, anno LXXXVI, serie IX. vol. 3°. anno 1915.

GIORNI DELLA MALATTIA

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25-27	28-29	30-31	32	33-36	
<i>Virus Lanfranchii</i>																														
Soluzione fisiologica . .	a	a	a	rr	n	n	nn	+	+	+	nn	nn	a	a	rr	r	n	nn	+	nn	+									
Siero normale	a	a	a	n	n	a	a	rr	rr	n	nn	nn	a	a	rr	n	n	nn	nn	+	nn									
Siero Lanfranchi I c. c.	a	a	a	a	a	rr	a	a	rr	rr	rr	r	r	n	n	n	nn	nn	nn	nn	nn	+								
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
<i>Virus Gambiense</i>																														
Soluzione fisiologica . .	r	n	nn	nn	nn	+	nn	+	nn	nn	+	nn	n	nn	+															
Siero normale	r	r	n	nn	nn	nn	+	rr	n	nn	nn	+	rr	nn	+															
Siero Lanfranchi I c. c.	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	rr	rr	n	nn	nn	+														
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
<i>Virus Evansi</i>																														
Soluzione fisiologica . .	r	n	nn	+	nn	+	nn	+	a	a	a	a	a	a	a	a	rr	rr	+	nn	+									
Siero normale	a	rr	r	nn	+	nn	rr	rr	rr	rr	r	a	n	n	nn	nn	nn	nn	+	nn	+									
Siero Lanfranchi I c. c.	a	rr	r	n	nn	+	nn	rr	rr	rr	r	r	n	n	nn	nn	nn	nn	+	nn	+									
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
" " " " " "	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	r	r	n	n	nn	nn	+	a	rr	r	n	nn	+	

a = trip. assenti; rr = trip. rarissimi; r trip. rari; n = trip. numerosi; nn = trip. numerosissimi.

Il primo fatto che si rileva è l'aumentato potere protettore del mio siero, ora sperimentato, in confronto a quello di cui era dotato un anno fa (vedi lavoro già citato).

Quindi, anche il comportamento di tali specie di immuncorpi ha risposto in modo perfetto a quanto si è verificato per quelli agglutinanti e lisinanti.

Le mie constatazioni trovano piena conferma dai risultati ottenuti da Heckenroth e M. Blanchard ⁽¹⁾, intesi a dimostrare come già per il potere tripanolitico la cura medicamentosa continuata apporti una diminuzione del potere protettore del siero dei malati. Quindi nel mio caso era facile il supporre che, essendo stata completamente sospesa da sei mesi la cura medicamentosa, detto potere dovesse essere aumentato, tanto più che gli stessi autori tale fatto verificarono in un individuo, che, considerato guarito, da un anno e mezzo più non aveva fatto nessuna cura.

Anche in tale caso si può supporre che l'infezione, prendendo un decorso cronico, finisca per indurre l'organismo a vieppiù difendersi contro l'infezione stessa colla produzioni di nuovi anticorpi; ma è sempre più accettabile l'ipotesi che, sottraendo i parassiti all'azione di una sostanza parasitotropica, tripanocida (nel caso speciale atoxyl), questi abbiano naturalmente riattivato la loro facoltà antigena inducendo conseguentemente speciali reazioni di difesa dai gruppi cellulari incaricati della produzione di anticorpi antagonisti alla causa antigena che funzionava quale stimolo speciale.

Ricordo che nelle mie prime ricerche (caso fra gli altri dimostrativo) il potere protettore del mio siero si manifestò, di fronte al *virus Lanfranchii*, con un prolungamento massimo di vita, in un ratto, di 1488 ore, assumendo l'infezione un andamento oltremodo benigno, mentre i controlli inoculati con *virus* a soluzione fisiologica venivano a morte in 84-90 ore; e nelle considerazioni scrivevo ⁽²⁾: « per il potere *protettore*, a parte alcuni risultati divergenti e non facilmente spiegabili (come quello notato nelle ricerche « *in extenso*, nelle quali l'animale, trattato con *virus Lanfranchii*, siero « normale, ha avuto l'infezione prolungata per 43 giorni, uno più che non « nel caso *virus Evansi* - siero *Lanfranchi*), risulta nuovamente il « distacco del *virus Brucey* e *rodesiense* dagli altri tre per il comportamento di fronte al mio siero; mentre per il *Gambiense* e l'*Evansi*, su « tre prove, il potere protettore è stato due volte maggiore per quest'ultimo; ed in quel caso in cui è stato maggiore il potere protettore per il « *gambiense*, l'animale è sopravvissuto solo di due giorni a quello trattato « con l'*Evansi*.

⁽¹⁾ F. Heckenroth e M. Blanchard, *Recherches sur l'existence des propriétés trypanolytiques* ecc. (Ann. de l'Inst. Pasteur, 1913), pag. 763.

⁽²⁾ Al. Lanfranchi, *Sulla possibile trasmissione* ecc. (Bull. delle scienze mediche, Bologna, anno LXXXVI, serie IX, vol. 3°, 1913).

« Quindi, anche per tale ordine di ricerche il *virus Lanfranchii* sembrerebbe riportarsi più all'*Evansi* che non al *gambiense* ».

Dalle attuali ricerche risulta che il siero ha esplicato completa azione protettiva su gli animali inoculati col *virus Lanfranchii*; e non solo quando è stato adoperato alla dose già sperimentata di 1 cc., ma anche quando si è usato a quella di $\frac{1}{2}$ e di $\frac{1}{4}$ di cc.

Ha esplicato pure azione protettiva completa sugli animali inoculati con l'*Evansi*, quando è stato adoperato alla dose di 1 e $\frac{1}{2}$ cc.

Eguale azione completa protettiva ha esplicato sugli animali inoculati col *virus gambiense* quando è stato usato alla dose di 1 cc., e, in un solo animale, anche a quella di $\frac{1}{2}$ cc.

Invece, nella dose di $\frac{1}{4}$ di cc. ha prolungato il decorso alla malattia sperimentale, negli animali inoculati con l'*Evansi*, nei limiti estremi di 24 e 36 giorni, mentre i controlli sono venuti a morte in 4-6 giorni.

Tale prolungamento del decorso della malattia sperimentale è anche maggiore di quello verificatosi in rapporto agli animali inoculati col *gambiense*, non solo quando tale *virus* fu inoculato con $\frac{1}{4}$ di cc. di siero, ma anche per quelli che ne riceverono $\frac{1}{2}$ cc. i quali vennero a morte, come si rileva dal prospetto, entro 18-21 giorni.

Occorre notare come risulti essersi verificato il fatto inverso, rispetto ai controlli. Così, mentre l'animale inoculato con *virus Evansi* soluzione fisiologica è venuto a morte nella quarta giornata, il corrispondente trattato, con il *gambiense*, è vissuto due giorni di più; e di fronte ai due inoculati con *virus Evansi* miscela siero normale, morti in quinta e sesta giornata, si ha che quelli che avevano ricevuto il *gambiense* sono vissuti 12 e 16 giorni.

Da tale constatazione intanto risulta che, pure ammettendo in linea generale, come il Laveran ⁽¹⁾ ed altri hanno dimostrato, che il siero umano possa possedere un'attività notevole di fronte al trip. della *surra*, tanto da poter essere attivissimo in miscuglio, possedendo inoltre anche delle proprietà preventive e curative, si deve ritenere che tale proprietà può in dati sieri fare difetto, come nel caso presente, od essere appena apprezzabile come risulta per le mie prime ricerche.

Il contrario, invece, si è verificato per il *virus gambiense*. Si conosce come si ritenga detto *virus* non risentire l'azione protettrice naturale del siero umano normale. Per le mie ricerche invece risulta che il siero umano ha dimostrato una certa azione protettrice, poichè, di fronte ai controlli inoculati con *virus*-soluz. fisiologia e venuti a morte in 6 giorni, gli animali che avevano ricevuto *virus*-miscela normale sono morti nei limiti estremi di 12-16 giorni, e la differenza è rappresentata dal periodo di inoculazione più lungo, in quanto, una volta comparsi in circolo i parassiti, il decorso della infezione è stato uguale in tutti i soggetti.

(1) A. Laveran, Acad. des sciences, 1 aprile 1902, 6 luglio 1903 e 22 febbraio 1904.

Come del resto il *virus gambiense* possa alcune volte essere sensibile al siero umano normale è stato riconosciuto da Mesnil e Ringenbach ⁽¹⁾. Successivamente il Mesnil ⁽²⁾ ha anche notato delle variazioni spontanee nel grado di sensibilità di un tale *virus*.

Su di un altro dato risultante dalle mie ricerche credo di dover richiamare l'attenzione poichè non è conforme a quanto avrebbe veduto il Mesnil, il quale nel lavoro sopra citato scrive: « Au point de vue de l'adaptation récente à l'homme, un *virus* intéressant à considérer est le *virus Lanfranchii*, trypanosome humaine d'un cas d'infection de laboratoire, que nous étudions depuis 1912. Or, depuis cette époque, ce *virus* s'est montré constamment insensible au sérum humaine. Nous nous contentons ici de signaler le fait » ⁽³⁾.

Orbene: già dalle mie prime ricerche, come dalle presenti, risulta che il detto *virus Lanfranchii* ha presentato un certo grado di sensibilità al siero umano normale.

Infatti in quelle riportai come un ratto fosse sopravvissuto, in confronto dello inoculato col solo *virus*, ben 39 giorni, e cinque giorni più di quello che aveva ricevuto la miscela *virus Evansi*-siero *Lanfranchi*, presentando inoltre una infezione ad andamento benigno con due crisi tripanolitiche. In queste la sopravvivenza non è stata così marcata ma pur sempre notevole: in un caso di nove, nell'altro di undici giorni.

Quali fattori possono avere influito negli esperimenti del Mesnil e miei, per dare risultati così differenti?

Certo nessuna o ben poca importanza possono rappresentare le variazioni individuali negli animali che sono stati inoculati.

Un valore ben maggiore può essere riconosciuto ai differenti sieri adoperati. Deve, a mio modo di vedere, esser preso in considerazione anche il fatto del come il *virus* sia stato mantenuto: se mediante passaggi su di una stessa specie di animale, o alternativamente su specie diversa.

Mi riserbo di tornare in proposito su di un tale argomento.

A parte tali constatazioni, ciò che emerge in modo esaurientemente dimostrativo da queste ricerche, in merito al potere protettore del mio siero, è il fatto che il *virus*, del quale sono infetto, è da riportarsi più all'*Evansi* che non al *gambiense*.

Mi riserbo, di fare in una Nota successiva, alcune considerazioni che derivano da tale logica conclusione.

(1) Mesnil e Ringenbach, Compt. rend. Acad. des sciences, 1 luglio 1912.

(2) Mesnil, Compt. rend. de la soc. de biologie, 26 dicembre 1914.

(3) Da un'ultima comunicazione fatta dal Mesnil alla Société de Pathologie exotique nella seduta del 6 febbraio 1916 (*Sensibilité au sérum humain normal de Trypanosomes d'origine humaine*), risulta come pure tale autore abbia ultimamente constatata una certa sensibilità del *Virus Lanfranchii* al siero umano normale, e conclude: « La souche *Lanfranchii* s'est montrée sensible au sérum humain environ 2 ans après sa sortie de l'homme; cette sensibilité est comparable à celle du *Tr. rhodesiense* et à celle actuelle de notre *Tr. Gambiense* ».

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

FOÀ ANNA. *Studio sul Polimorfismo unisessuale del Rhizoglyphus echinopus*. Pres. dal Socio GRASSI.

E. M.